Handbuch der Perspektive.

Zweiter oder theoretischer Theil,

welcher

die Beweise für die Regeln des ersten Theils enthält.

Aufgesetzt

von

Johann Albert Eytelwein.

Mit zwei Kupfertafeln.

Berlin, 1810.

In der Realschulbuchhandlung.

Zweiter Theil,

welcher

die Gründe der perspektivischen Regeln enthält.

Beweise zum ersten Abschnitte.

§. 181.

Auf der wagerechten Grundebene YZ, Fig. 112., stehe die Tafel BCDE senkrecht und es sei G der Gesichtspunkt, A der Augenpunkt und DE der Horizont. Befindet sich nun in der Grundebene die Linie KL deren Bild man sucht, so darf nur aus G die Linie GQ mit KL parallel, durch Q und K die Linie QK und durch G und L die Linie GL gezogen werden, so ist Kl das Bild KL. Taf. XVII Fig. 112.

Denn mit der wagerechten Linie KL ist GQ parallel, also ist GQ wagerecht und weil G mit dem Horizonte DE in einerlei wagerechten Ebene liegt, so muß auch GQ in derselben Ebene, also Q im Horizonte DE liegen. Man denke sich durch GQ und KL eine Ebene gelegt, so ist QK ihre Durchschnittslinie mit der Tafel und weil jede Linie, welche man von G nach KL zieht, in dieser Ebene liegt, so muß auch der Gesichtsstrahl GL die Linie QK in irgend einem Punkte l schneiden. Daher weil das Bild von L so wohl in der Tafel als auch im Gesichtsstrahl GL liegen muß, so ist l das Bild von L. Für jeden andern Punkt L′ der Linie KL ziehe man GL′, so ist l′ das Bild von L′ daher die grade Linie Kl das Bild von KL.

Wird durch G und A die Vertikalebene GAA′G′ gelegt, so ist solche die Vertikalebene des Auges und A′ der Grundpunkt (§. 2.) Alle Gesichtsstrahlen,

Taf. XVII. Fig. 112. welche man innerhalb dieser Ebene ziehen kann, schneiden die Tafel in der Linie AA′, daher ist AA′ das Bild von der Vertikalebene des Auges.

Eben so ist der perspektivische Winkel lKC das Bild des Winkels LKC und lkb das Bild von LKB.

§. 182.

1. Zusatz. Mit KL werde in derselben Grundebene oder wie hier angenommen ist, in einer andern damit parallelen Ebene eine Linie MN parallel gezogen, welche die Tafel in M schneidet, so ist GQ auch mit MN parallel und wenn man QM und GN zieht so findet man das Bild Mn von MN, und Q ist daher der Vereinigungspunkt aller mit KL parallelen Linien, sie mögen in der Grundebene oder über derselben liegen.

Je weiter sich der Punkt N von M entfernt oder je länger MN wird, desto näher rückt das Bild n an Q und nur wenn MN unendlich groß ist, kann n in Q fallen, daher man Q den Grenzpunkt der Linie MN nennt.

§. 183.

2. Zusatz. Steht die Linie RL der Grundebene auf der Grundlinie BC winkelrecht, so fällt diejenige Linie welche durch G mit RL parallel gezogen wird in den Augenpunkt A und die Verlängerung des Bildes von RL fällt daher in den Augenpunkt A, welches eben so von jeder Linie gilt, welche auf der Tafel winkelrecht steht. Auch sind die perspektivischen Winkel ARB und ARC die Bilder von rechten Winkeln.

§. 184.

Fig. 113. 3. Zusatz. Fällt die Verlängerung der Linie LK, Fig. 113., in den Fuß G′ des Auges, so ist, weil G′K mit GQ parallel, A′K = AQ, also KQ auf BC winkelrecht, daher die Bilder aller Linien der Grundebene, welche verlängert in den Fuß des Gesichtspunktes treffen, senkrecht auf der Grundlinie der Tafel stehen.

Das Bild vom Fuße des Gesichtspunktes liegt da, wo die hinlänglich verlängerte Linie GG′ die Tafel schneidet (§. 2.); nun ist GG′ mit der Tafel parallel, und weil man von Parallellinien annehmen kann daß sie sich in einer unendlich großen Entfernung schneiden, so wird eine jede Vertikallinie welche auf der Grund-

line BC senkrecht steht, wie QK, EB, hinlänglich verlängert durch das Bild Taf. XVII. Fig. 113.
vom Fuße des Gesichtspunktes gehen.

§. 185.

Aus dem Punkte L, Figur 112., der Grundebene ziehe man LR auf die Fig. 112.
Grundlinie BC senkrecht, so ist Rl das Bild von RL. Man nehme auf dem verlängerten Horizont AP = AG, ziehe durch P und l die Linie PS, so ist RS = RL. Denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AGl und lLR verhält sich

Al : AG = Rl : RL

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke APl und lRS

Al : AP = Rl : RS oder weil AP = AG ist

Al : AG = Rl : RS daher muß RS = RL seyn.

Ist daher der Abstand RL eines Punkts L von der Tafel bekannt, so kann daraus leicht das Bild l auf der Tafel gefunden werden. Hiebei ist es einerlei ob man die Weite AG nach P oder auf der entgegengesetzten Seite nach P′ trägt, nur muß alsdann RL nach B hin getragen werden.

Wären von dem bei R rechtwinklichten Dreieck KRL die Seiten KR und RL gegeben, so könnte man das Bild Rl von RL auf die eben beschriebene Weise finden, alsdann ist das Dreieck KRl das Bild von KRL und man hat hiedurch zugleich das Bild Kl von der gegen die Grundlinie BC geneigten Linie KL gefunden. Auch ist der perspektivische Winkel RKl das Bild des Winkels RKL.

§. 186.

Zusatz. Liegt die wagerechte Linie MN, Fig. 112., über der Grundebene BZ, so kann man das Bild n von N auf gleiche Art wie das Bild von L mit Hülfe des Punkts P oder P′ finden, wenn man durch M eine mit BC parallele Linie zieht, diese als Grundlinie annimmt und eben so wie im vorigen §. verfährt. Dies gilt überhaupt von allen wagerechten Linien sie mögen sich auf oder über der Grundebene befinden.

§. 187.

Beweis zu §. 10.

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke GQl und lKL Figur 112. verhält sich Fig. 112.

GQ : KL = Ql : lK oder

GQ+KL : KL = Ql+lK : lK oder auch

GQ+KL : KL = QK : Kl (I).

Taf. I. Fig. 7. Taf. XVII. Fig. 112. Hat nun KL, Fig. 7., mit KL, Fig. 112., einerlei Länge und Lage und es ist die Augenhöhe und der Augenabstand in beiden Figuren gleich groß, also Ao = AG, so ist auch der Winkel A'KL = AQG = AQo, daher sind die rechtwinklichten Dreiecke AQG und AQo einander gleich, also GQ = oQ, folglich auch AQ so wohl als QK in beiden Figuren gleich groß. Nun verhält sich Figur 7.

$$oQ \quad : KL = Ql \quad : lK \text{ oder}$$
$$oQ + KL : KL = QK \quad : Kl.$$

Da nun die drei ersten Glieder dieser Proportion mit den drei ersten Gliedern der Proportion (I) übereinkommen, so muß auch Kl Fig. 7. = Kl Fig. 112. seyn, folglich ist durch die Auflösung §. 10. das Bild Kl von KL gefunden.

§. 188.

Fig. 114. Die Tafel BD, Fig. 114., stehe auf der wagerechten Grundebene YZ senkrecht und in derselben sey MN mit der Grundlinie BC parallel. Aus G ziehe man nach M und N die Gesichtsstrahlen GM, GN und es sei mn die Linie in welcher die Ebene GMN die Tafel BD schneidet, so ist mn das Bild von MN. Weil aber BC und MN zwei parallele Durchschnittslinien der drei Ebenen GMN, BCDE und YZBC sind, so muß auch die dritte Durchschnittslinie mn mit diesen parallel seyn, oder das Bild mn ist mit der Grundlinie BC parallel. Eben dies wird auf gleiche Art für jede mit MN parallele Linie erwiesen.

§. 189.

Fig. 114. Zusatz. Nach einem willkührlichen Punkte K, Fig. 114., der Grundlinie, ziehe man durch M die Linie KL, so ist der Winkel NML = CKL. Zieht man durch K und m die Linie Kl, so ist diese das Bild von KL, und die einander geometrisch gleichen Winkel CKl, nml sind Bilder von den gleichen Winkeln CKL, NML. Hieraus folgt daß die Winkel CKl und nml nicht nur perspektivisch sondern auch geometrisch einander gleich sind, welches jedesmal der Fall ist, wenn zwei mit der Grundlinie parallele Linien von einer dritten geschnitten werden.

§. 190.

Taf. I. Fig. 8. Beweis zu §. 15.

Man verlängere dg bis Q, Figur 8., an den Horizont und bis D an die

Grundlinie; auch ziehe man AE durch A und d und P′F′ durch P′ und d. In E werde EF auf ED senkrecht gezogen, EF = EF′ angenommen und DF gezogen, so ist EDF das Maaß des Winkels EDd also auch von edg. Nun verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke zwischen den Linien de und AQ Taf. I. Fig. 8.

de : ef′ = AQ : AP′

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke zwischen den Linien DE und AQ

DE : EF′ = AQ : AP′ also

de : ef′ = DE : EF′ oder

de : ef = DE : EF

daher sind die rechtwinklichten Dreiecke def und DEF einander ähnlich also der Winkel edf = EDF und weil EDF das Maaß von edg ist, so muß auch edf das Maaß von edg seyn.

§. 191.

Von der Linie MN, Figur 115., in der Grundebene YZ sei Mn das Bild auf der Tafel BD und Q der Vertiefungspunkt im Horizonte DE, so ist die Linie GQ welche man aus dem Gesichtspunkte G nach Q zieht, mit MN parallel. (§. 181.) Aber die Winkel CMN und AQG liegen in wagerechten also parallelen Ebenen und MC ist mit QA und MN mit QG parallel daher sind die Winkel CMN und AQG einander gleich. Der Winkel CMN ist der geometrische Neigungswinkel der Linie MN gegen die Grundlinie BC und der Winkel CMn der perspektivische Neigungswinkel dieser Linie gegen die Grundlinie, daher der Winkel CMn ≡ CMN (§. 13.) oder AQG ≡ CMn. Taf. XVII. Fig. 115.

Auf der Vertikallinie AA′ nehme man AO = AG, so ist O der Hülfspunkt. Man ziehe OQ so ist △ AOQ = AGQ, weil AO = AG, AQ = AQ und die Winkel OAQ und GAQ rechte Winkel sind. Daher ist auch der Winkel AQO = AQG und wenn man oo durch O mit DE parallel zieht, der Winkel oOQ = AQO = AQG. Nun war AQG ≡ CMn daher ist auch oOQ ≡ CMn oder jedem perspektivischen Neigungswinkel, wie CMQ, entspricht ein geometrischer Winkel oOQ welchen man findet, wenn aus dem Hülfspunkt O nach dem Vertiefungspunkte Q die Linie OQ und mit dem Horizonte DE parallel, die Linie Oo gezogen wird.

Taf. XVII. Fig. 115.

§. 192.

1. Zusatz. Wäre M'N' irgend eine mit MN parallele Linie, welche nicht in der Grundebene YZ liegt, und man zieht durch M' die Linie B'C' mit der Grundlinie BC parallel, so ist B'C' die Durchschnittslinie einer Ebene mit der Tafel, in welcher die Linie M'N' liegt und welche mit der Grundebene parallel ist. Es läßt sich alsdann eben so beweisen daß der Winkel oOQ das Maaß des Winkels C'M'Q ist oder daß C'M'Q = oOQ seyn muß. Hiedurch erhält man eine leichte Regel das Maaß eines jeden perspektivischen Winkels zu finden, wenn ein Schenkel desselben in die Grundlinie fällt oder in einer mit der Grundebene parallelen Ebene liegt.

Fällt die Linie B'C' über den Horizont DE in B''C'' und durch den Punkt M'' derselben ist M''N'' mit MN parallel gezogen, so ist ebenfalls wie vorhin oOQ das Maaß des Winkels C''M''Q.

Weil die Linien MN und M'N' parallel sind, so ist der Winkel welchen sie einschließen wenn sie bis ins Unendliche verlängert werden = 0, daher muß auch das Maaß des Winkels MQM' = 0 seyn.

§. 193.

Fig. 116. 2. Zusatz. Wäre der Horizont DE, Fig. 116., (nach §. 16.) in Grade eingetheilt, so könnte man das Maaß eines jeden Winkels C'M'Q angeben, weil die Anzahl der Grade welche von Null bis Q auf der verlängerten Linie QD enthalten sind, das Maaß des Winkels C'M'Q bestimmen. Fällt Q in A, so ist der zugehörige Winkel C'M'A ein rechter und wenn Q noch weiter, etwa in Q' fällt, so hält der Winkel C'M'Q' so viel Grade, als zwischen oA und AQ' enthalten sind. Hier 90 + 40 = 130 Grad und der Nebenwinkel Q'M'C'' hält 50 Grad.

Das Maaß eines Winkels QM'Q' läßt sich nun ebenfalls leicht finden; denn der Winkel C'M'Q' hält 130 Grad und C'M'Q = 60 Grad. Aber C'M'Q' — C'M'Q = 130 — 60 Grad = 70 Grad, daher QM'Q' = 70 Grad oder der Winkel QM'Q' hält so viel Grade als zwischen seinen Schenkeln auf dem Horizonte von Q nach Q' enthalten sind.

Will man einen Winkel wie QM'N' ausmessen, so verlängere man N'M' rückwärts bis Q', alsdann ist N'M'Q + QM'Q' = 180 Grad, daher N'M'Q = 180 — QM'Q' oder N'M'Q = 180 — 70 = 110 Grad.

§. 194.

§. 194.

Taf. XVII.

Stellt man sich vor, daß auf der Grundebene BZ, Figur 114., eine Fig. 114.
Kreisfläche abgebildet wäre, von deren Umfange Gesichtsstrahlen nach dem Augenpunkte G gehen, so werden diese einen Kegel einschließen, dessen Spitze in G liegt, und dessen Grundfläche die Kreisfläche ist. Da wo die Tafel BD den Kegel durchschneidet, entsteht das Bild der Kreisfläche, und weil ein solcher schiefer Durchschnitt eines Kegels, jedesmal eine Ellipse bildet, so muß das Bild eines jeden wagerechten Kreises eine Ellipse seyn.

§. 195.

Auf der Tafel BD, Figur 117., sei die Linie ab gegeben, deren Vertie- Fig. 117.
fungspunkt in q fällt, und welche verlängert die Grundlinie in c schneidet. Man nehme qt = qO, so heißt t der Theilungspunkt für qc. Der geometrische Winkel Oqt sei = α, so ist nach bekannten geometrischen Lehren im gleichschenklichten Dreiecke Oqt der Winkel AOt = $\frac{1}{2}$ Oqt = $\frac{1}{2}\alpha$. Man ziehe durch a und b aus t die Linien ta′ und tb′, und mit BC parallel, durch O, die Linie yz, so ist der Winkel qOy = α, also qOt = qtO = tOz = 90° — $\frac{1}{2}\alpha$; auch ist α das Maaß der Neigung aller Linien, welche durch q gehen, so wie 90° — $\frac{1}{2}\alpha$ das Maaß der Neigung aller Linien ist, welche durch t gehen. [§. 191.] Daher ist auch der Winkel qcb′ = α und tb′c = 90° — $\frac{1}{2}\alpha$, also im Dreieck bb′c der Winkel b′bc = 180° — α — (90° — $\frac{1}{2}\alpha$) = 90° — $\frac{1}{2}\alpha$, folglich der Winkel b′bc = bb′c, also das perspektivische Dreieck bb′c gleichschenklicht oder bc = b′c. Aus gleichen Gründen wird, weil aa′ mit bb′ parallel ist, ac = a′c, folglich a′b′ = ab, daher ist a′b′ das Maaß der Linie ab. Hieraus sieht man, wie mittelst des Theilungspunktes t, das Maaß einer jeden zugehörigen Linie gefunden werden kann.

Von diesem für die Ausübung der Perspektive äußerst wichtigen Satze, kann man sich auch auf folgende Art überzeugen. Es sei ca, Figur 118., das Bild der Linie ca′, welches nach §. 8. gefunden worden. Man nehme ce = ca′, so ist ce das Maaß der Linie ca. Durch e und a werde et bis an den Horizont AP gezogen, so verhält sich der Zeichnung gemäß

Taf. XVII. Fig. 118.

$Aq : qt = cd : ce$ oder

$Aq^2 : qt^2 = cd^2 : ce^2$ oder weil

$ce^2 = a'c^2 = cd^2 + a'd^2 = cd^2 + dg^2$, so wird auch

$Aq^2 : qt^2 = cd^2 : cd^2 + dg^2$.

Ferner verhält sich $Aq : AP = cd : dg$ oder

$Aq^2 : AP^2 = cd^2 : dg^2$ oder auch

$Aq^2 : Aq^2 + AP^2 = cd^2 : cd^2 + dg^2$. Aber auch

$qt^2 : Aq^2 = cd^2 + dg^2 : cd^2$ daher

$qt^2 : Aq^2 + AP^2 = 1 : 1$ folglich

$qt^2 = Aq^2 + AP^2$. Aber $qO^2 = Aq^2 + AO^2$, daher, weil $AO = AP$, ist auch $qt = qO$.

§. 196.

Fig. 117. 1. Zusatz. Weil Figur 117., der Winkel $AOt = \frac{1}{2}\alpha$, also die Hälfte von dem Neigungswinkel der Linie qc ist, so findet man auch den Theilungspunkt t, wenn man die Hälfte der Grade des Neigungswinkels α von A bis t zählt.

2. Zusatz. Jede andere, mit BC parallele Linie, kann als die Durchschnittslinie einer wagerechten Ebene mit der Tafel angesehen werden, [§. 192.] und wenn man diese Durchschnittslinie als eine zweite Grundlinie annimmt, von welcher Vertiefungslinien nach irgend einem Punkte q des Horizonts gehen, [§. 182.] so findet man für diese Vertiefungslinien den Theilungspunkt eben so, wie vorhin, weil der Beweis unverändert bleibt.

§. 197.

Fig. 119. Die Linie ab, Figur 119., sei mit der Grundlinie BC parallel. Man nehme im Horizonte einen willkürlichen Punkt t an, ziehe durch a und b die Linien ta′, tb′ bis an die Grundlinie, so ist im Viereck abb′a′, ab mit a′b′ und aa′ mit bb′ parallel, also das Viereck das Bild eines Parallelogramms, daher $a'b' = ab$, oder a′b′ ist das Maaß der Linie ab, welches sich für jeden andern Punkt im Horizont eben so beweisen läßt.

§. 198.

Fig. 6. Wären die Linien Oq, Ot, qt, Figur 6., einander gleich, also das Dreieck Oqt gleichschenklicht, so wird der Winkel $AOq = AOt = 30$ Grad, [§. 195.] und $Aq = At$.

§. 199. Taf. XVII.

Für jede Linie, wie cA, Figur 119., welche nach dem Augenpunkte A geht, Fig. 119.
ist t der Theilungspunkt, wenn At = AO genommen wird. [§. 195.] Man ziehe bd mit der Grundlinie BC parallel, so ist im Rechteck A'dbc, bc ≡ dA', also haben beide Linien gleiches Maaß. Nun ist A'd' das Maaß von A'd, also auch von bc. Sind daher die Maaße aller Linien wie A'd auf A'A mit Zahlen bemerkt, so darf man nur, um das Maaß der Linie bc zu finden, durch b mit BC die Parallel bd ziehen, so giebt die bei d befindliche Zahl das Maaß der Linie bc an. Wäre A'd' = 5 Fuß oder Zoll, und man findet bei d die Zahl 5, so zeigt dies an, daß 5 Fuß oder Zoll das Maaß von bc sind. Statt AA' kann auch jede damit parallele Linie BE eingetheilt werden, wenn nur bei der Eintheilung der Linie BE eben so, wie bei AA' verfahren wird.

§. 200.

Beweis zu §. 38. für die vierte Auflösung.

Weil MZ = ZV, Figur 18., so ist $MV^2 = 2\ MZ^2$ oder $MZ =$ Taf. II. Fig. 18.
$MV\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071068\ MV$, oder beinahe $MZ = \frac{7}{10} MV$ also $NZ = \frac{3}{10} MN$.

§. 201.

Wäre der Vertiefungspunkt q der Linie cd, Figur 117., nicht bekannt, Taf. XVII. Fig. 117.
so ziehe man OD, und durch den Durchschnittspunkt f der Linien cd und AO, die Linie fg mit BC parallel bis an DO. Mit gd werde Ok parallel gezogen, und der Winkel kOz durch Ot in zwei gleiche Theile getheilt, so ist t der Theilungspunkt für die Linie cd. Denn es verhält sich

OA : Of = OD : Og und

OD : Og = kD : kd also

OA : Of = kD : kd

daher müssen die Linien AD, fd, Ok in einen gemeinschaftlichen Punkte zusammentreffen, oder Ok hat mit cd einerlei Vertiefungspunkt. Dieser Punkt sei q, so ist der Winkel kOy das Maaß des Winkels dcC, [§. 191.] folglich, wenn der Winkel qOt = tOz ist, muß [§. 195.] t der Theilungspunk der Linie cd seyn.

Schneidet Ok die Grundlinie BC in h, so kann man auch den Theilungs-

Taf. XVII. Fig. 117. punkt t finden, wenn hl = hO genommen, und durch Ol die Linie Ot gezogen wird, weil alsdann qt = qO ist. [§. 195.]

Taf. II. Fig. 20.

§. 202.

Beweis zu §. 40. für die erste Auflösung.

Vermöge der Zeichnung verhält sich Figur 20.,

ad : ac = aD : ae und
aD : ae = bD : bf folglich
ad : ac = bD : bf

daher müssen die Linien ab, cf, dD, in einen gemeinschaftlichen Punkte zusammen treffen.

Ferner verhält sich

gd : ga = gD : gh und
gD : gh = kD : kb folglich
gd : ga = kD : kb

daher müssen auch die Linien gk, ab, dD, in einerlei Punkt zusammen treffen.

Beweis für die zweite Auflösung. Weil lc = bm, und beide Linien mit einander perspektivisch parallel sind, so ist blcm ein perspektivisches Parallelogramm, also cm mit bl perspektivisch parallel, wie erfordert wird.

§. 203.

Fig. 21. Beweis zu §. 41. für die zweite Auflösung.

Man verlängere ca, Figur 21., bis solche die ob oder ob′ in f oder f′ schneidet, so verhält sich

cf : af = cb : db oder cf′ : af′ = cb′ : d′b′ und
cb : db = Db : eb cb′ : d′b′ = Eb′ : e′b′ folglich
cf : af = Db : eb cf′ : af′ = Eb′ : e′b′

daher fb, ae, cD oder f′b′, ae′, cE′, in einen gemeinschaftlichen Punkte zusammen treffen.

Fig. 22. Beweis für die dritte Auflösung. In den Dreiecken abf, Figur 22., und bfd sind die Winkel fab = abf = fbd = bdf = 45 Grad, also das Dreieck abf = bfd, daher af = fd, und weil fe auf ad winkelrecht steht, so ist der Winkel ead = ade = cdP, also die Anzahl der Grade zwischen cP, das Maaß von ead, folglich die Anzahl der Grade zwischen Ac, das Maaß des Winkels bae, weil die Grade zwischen AP das Maaß des Winkels fab sind.

§. 204. Taf. II.

Beweis zu §. 42. für die zweite Auflösung.

Durch den Theilungspunkt O, Figur 19., werde Oh mit gd parallel gezogen, so läßt sich wie §. 202. beweisen, daß die Linien AD, gd und Oh einen gemeinschaftlichen Vereinigungspunkt haben, daher wenn Oy mit BC parallel gezogen wird, so ist der Winkel yOh das Maaß von der Neigung der Linie cd, gegen die Grundlinie. [§. 192.] Da nun der Winkel dgk = yOh, so ist auch dgk das Maaß für die Neigung der Linie cd. Fig. 19.

§. 205.

Die Tafel BD, Figur 120., stehe auf der Grundebene YZ senkrecht, der Gesichtspunkt liege in G, der Augenpunkt in A, und es befinde sich hinter der Tafel auf der Grundebene eine Vertikallinie oder Höhe KL als Gegenstand. Man ziehe KK′ und LL′ auf die Tafel winkelrecht, so ist K′L′ = KL. Werden hernach AK′, AL′ und aus dem Gesichtspunkte G, die Strahlen GL, GK gezogen, so giebt der Durchschnitt der Linien GK und AK′ in k das Bild von K, und der Durchschnitt der Linien GL und AL′ in l das Bild von L. [§. 183.] Man ziehe kl, so liegt diese Linie in der Vertikalebene GKL, und in der vertikalen Tafel BD, daher ist kl vertikal und mit KL und K′L′ parallel. Taf. XVII. Fig. 120.

§. 206.

Ueber der Grundebene CZ, Figur 121., befinde sich die Linie FK, welche die Grundlinie BC in F schneidet, und gegen die Grundebene CZ eine geneigte Lage hat. Ist nun FI die Projektion der Linie FK, so kann die Lage derselben durch den Horizontalwinkel CFI = α, und den Vertikal- oder Höhenwinkel IFK = β angegeben werden. Fig. 121.

Es sei G der Gesichtspunkt, A der Augenpunkt und DE der Horizont der Tafel. Aus G ziehe man GQ, mit FI und GR mit FK parallel, so muß Q im Horizont DE liegen, weil GQ horizontal ist. Die Ebene QGR ist vertikal, weil sie mit der Ebene des Vertikalwinkels IFK parallel ist, daher muß eine in Q errichtete Vertikallinie QR, die Linie GR schneiden. Auch ist der Winkel AQG = α und QGR = β, weil AQ, GQ, GR mit AF, FI, FK parallel sind. Eine durch GR und FK gelegte Ebene, schneidet die Tafel in der Linie FR, daher findet man das Bild k von K, im Durchschnittspunkte k, wenn man

Taf. XVII. Fig. 121. GK zieht. Auch ist R der Grenzpunkt für die Linie FK, weil nur dann, wenn FK unendlich groß wird, das Bild k von K in den Punkt R fallen kann.

§. 207.

1. Zusatz. Für jede andere, mit FK parallele Linie, welche in irgend einem willkürlichen Punkte die Grundebene CZ, oder ihre Erweiterung schneidet, bleiben die Winkel α und β ungeändert, daher muß auch der Grenzpunkt R, der gemeinschaftliche Vertiefungspunkt aller mit FK parallelen Linien seyn.

§. 208.

Fig. 122. 2. Zusatz. Will man daher auf der Tafel BD, Figur 122., eine Linie auftragen, welche über der Grundebene eine gegebene Lage haben soll, so nehme man A′f, dem gegebenen Abstande A′F, Figur 121. gleich. Auf AO trage man den Augenabstand AG bis O, und nehme den Winkel AOa $=$ 90° $- \alpha$, so ist das Dreieck OAa $=$ GAQ, weil beide bei A rechtwinklicht sind, AO $=$ AG, und der Winkel AOa $=$ AGQ $=$ 90° $- \alpha$ ist. Daher ist auch aO $=$ QG, und wenn man aO auf aE bis o trägt, so ist ao $=$ QG. Man nehme den Winkel aor $= \beta =$ QGR, errichte ar auf ao senkrecht, so ist das Dreieck aor $=$ QGR, folglich haben die Punkte r und f, gegen die Tafel Figur 122., eben die Lage, wie die Punkte R und F, gegen die Tafel, Figur 121., daher ist auch r der Vertiefungspunkt für alle Linien, welche mit der Linie af den Winkel β einschließen, [§. 207.] und sich in einer, über af errichteten Vertikalebene befinden. Es haben daher alle Vertikalwinkel, wie agr, afr einerlei Maaß $= \beta$.

(Fig. 121. beside the line "man A′f, dem gegebenen Abstande A′F, Figur 121. gleich.")

§. 209.

Fig. 122. 3. Zusatz. Jede andere Linie af′, Figur 122., welche durch den Punkt a geht, schließt mit der Grundlinie BC, den Horizotalwinkel af′C $\equiv \alpha$ ein. [§. 182.] Daher wird auch jede Linie, wie f′r, g′r, mit der Linie af′ einen Vertikalwinkel $\equiv \beta$ bilden. [§. 207.]

§. 210.

4. Zusatz. Für jeden andern Vertikalwinkel, welcher größer oder kleiner als β ist, erhält man bei unverändertem Horizontalwinkel α, einen andern Punkt r, Figur 122., in der durch a auf DE errichteten senkrechten Linie de. Wenn man daher, mittelst eines Winkelmessers aus dem Punkte o, die Winkel auf ae

bemerkt, so kann jeder über af errichtete Winkel leicht ausgemessen werden. Theilt man ad auf gleiche Art ein, so dient dies zum Ausmessen der stumpfen Winkel, wie agl, welcher hier 160 Grad mißt, weil das Maaß seines Nebenwinkels 20 Grad ist. Hievon überzeugt man sich durch eine ganz ähnliche Betrachtung, wie bei den spitzen Winkeln. Taf. XVII. Fig. 122.

§. 211.

5. Zusatz. Durch den Punkt f, Figur 122., ziehe man fa′ bis an den Horizont DE auf BC winkelrecht, so ist fa′ die Durchschnittslinie, in welcher die auf af errichtete Vertikalebene die Tafel BD durchschneidet. Da sie in die Tafel fällt, so hat jede Linie derselben mit der Skale BC einerlei Maaß, und man kann sie eben so wie die Skale eintheilen. Die Fläche afa′ ist alsdann das Bild auf der Tafel, von der über af errichteten Vertikalfläche. Für den Vertiefungspunkt r nehme man auf de, $rt = ro$, so kann der Punkt t zum Ausmessen jeder Linie, wie fk dienen, wenn man durch t und k, die Linie tkK bis an a′f zieht. Durch o werde yz mit de parallel gezogen, auch ziehe man to, und setze den Winkel $tro = \gamma$, so ist $roy = \gamma$, und nach bekannten geometrischen Lehren, der Winkel $aot = \frac{1}{2}\gamma$. Ferner ist der Winkel $rot = otr = toz = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Nun ist der Winkel aor das Maaß des perspektivischen Winkels afr; eben so der Winkel $roy = \gamma$ das Maaß von rfK, und der Winkel $toz = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ das Maaß von fKt, daher ist auch der Winkel $rfK = \gamma$ und $fKt = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, folglich im perspektivischen Dreieck, fKk der Winkel $fkK = 180^\circ - \gamma - (90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Es ist daher der Winkel $fKk = fkK$, also das Dreieck fKk gleichschenklicht, daher $fk = fK$ oder fK ist das Maaß von fk. Eben so erhält man, wie §. 195. KM für das Maaß der Linie km. Auch bleibt das Verfahren zur Bestimmung des Maaßes einer jeden andern Linie, wie gh, eben dasselbe, weil der Beweis auf gleiche Weise geführt werden kann.

Zum Auftragen der Winkel und Figuren in der Vertikalebene afa′, kann man sich daher der Punkte a, o und der Linien de, a′f auf eine ähnliche Art, wie der Punkte A, O und der Linien DE, BC, beim Auftragen der Figuren in der wagerechten Grundebene bedienen, und deswegen kann man a den Hauptpunkt,

Taf. XVII. Fig. 122. o den Theilungspunkt, de die Grenzlinie, a′f die Skale und af die Durchschnittslinie der Vertikalebene afa′ nennen.

§. 212.

6. Zusatz. Der Punkt g, Figur 122., welcher in der Durchschnittslinie af der Vertikalfläche liegt, behalte auf der Tafel seine Lage unverändert. Rückt nun a weiter nach D und immer weiter über D hinaus, so wird bei unverändertem Höhenwinkel aor = β, der Horizontalwinkel aOY = α desto kleiner, je weiter a über D hinaus fällt. Wird endlich der Schenkel ga des Winkels agh, mit dem Horizonte DE parallel, so ist α = o, der Punkt o fällt in A und der Schenkel gh, wird mit or parallel. In diesem Falle ist also der perspektivische Winkel agh, so groß wie sein Maaß aor. Es müssen daher in denjenigen **Vertikalebenen, deren Durchschnittslinie mit der Grundlinie der Tafel parallel ist, alle perspektivische Winkel ihrem Maaße gleich seyn.**

§. 213.

Beweis zu §. 69.

Fig. 123. In der Grundebene, Figur 123., sei A′ der Fuß vom Augenpunkte, G′ der Fuß vom Gesichtspunkte, A′C die Grundlinie der Tafel, und cc′eg eine Kreisfläche, welche die Grundfläche eines Cylinders vorstellt. Von G′ ziehe man nach dem Umfange der Kreisfläche die Berührungslinien G′c′, G′e′; ziehe ferner c′e′ und nach dem Mittelpunkte a die Linie G′a, so wird solche die Linie c′e′ in a′ senkrecht durchschneiden. Denkt man sich über c′e′ ein vertikales Rechteck, von der Höhe des Cylinders, so bilden die beiden vertikalen Seiten desselben diejenigen Linien im Umfange des Cylinders, welche als äußerste Grenzen seines Bildes erscheinen. Wenn daher die Lage der Linie G′a′ bekannt ist, so darf man nur c′e′ durch a′ auf a′G′ senkrecht ziehen, um die Lage von c′e′ zu finden. Nun geht a′G′ durch den Fuß G′ des Gesichtspunktes, daher muß das Bild von G′a′ auf der Grundlinie der Tafel senkrecht stehen, [§. 184.] und man kann alsdann, mittelst des perspektivischen Winkelmessers c′e′ auf a′G′ senkrecht ziehen.

Der Abstand aa′ wird desto kleiner gegen ce, je größer a′G′ wird. In den meisten Fällen kann man zur Erleichterung der perspektivischen Zeichnung aa′ = o setzen, alsdann fällt a in a′ und c′e′ in den Durchmesser ce, wonach
Taf. VII. Fig. 52. die Linie ce, Figur 52., bestimmt ist.

§. 214.

§. 214. Taf. IV.

Beweis zu §. 80. (7.)

Weil A, Figur 40., der Augenpunkt, und abc das Bild eines rechten Fig. 40.
Winkels ist, so muß der Hülfspunkt in einer, auf dem Horizont ef senkrechten Linie AO, in demjenigen Punkte liegen, wo die Linien Oe und Of, welche man nach den Vertiefungspunkten e und f, des Winkels abc zieht, einen rechten Winkel eOf bilden. [§. 192.] Nun ist eOf ein rechter Winkel, vermöge der Zeichnnng, daher ist O der Hülfspunkt.

§. 215.

1. Zusatz. Wird daher unter dem Horizonte ein Halbkreis beschrieben, dessen Endpunkte in die Vertiefungspunkte e, f, von dem Bilde abc eines rechten Winkels fallen, so muß der Hülfspunkt in dem Halbkreise ekf liegen.

§. 216.

2. Zusatz. Jeder von den Winkeln abd und dbc, habe 45 Grad zu seinem Maaße, so muß, wenn O der Hülfspunkt wäre, jeder von den Winkeln eOg und gOf, der Hälfte eines rechten Winkels gleich seyn. [§. 192.] Nimmt man nun die Bogen el und lf gleich groß an, und zieht durch l und g die Linie lO, so stehen die Winkel eOl und lOf als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen el und lf, daher hält jeder 45 Grad, und O ist der Hülfspunkt.

§. 217.

Die Ebene VW, Figur 124., sei gegen die vertikale Tafel BD geneigt, Taf. XVII. Fig. 124.
und bc die Durchschnittslinie beider Ebenen. Aus dem Gesichtspunkte G, ziehe man GA auf die Tafel senkrecht, so ist A der Augenpunkt der Tafel. Aus A werde Aa′ auf bc, und aus a′ in der schiefen Ebene VW, die Linie a′g′ auf bc senkrecht gezogen, so muß eine aus G, auf die schiefe Ebene VW gefällte winkelrechte Linie Gg′, die Linie a′g′, in irgend einem Punkte g′ schneiden. Man verlängere g′a′ nach f, so ist Aa′f der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Tafel (§. 81. Anmerk.).

Aus G werde die Linie Ga, mit g′a′ parallel gezogen, so wird solche die Tafel in der Verlängerung a′A in a schneiden, und weil aG mit a′f parallel, so ist der Winkel AaG, dem Neigungswinkel Aa′f, der schiefen Ebene gleich.

Vom Punkte K, in der schiefen Ebene VW, werde KL auf bc winkel-

Taf. XVII. Fig. 124. recht gezogen, so ist KL mit a'f, also auch mit Ga parallel; wenn man daher GK und aL zieht, so liegt das Bild k von K im Durchschnittspunkte dieser beiden Linien. [§. 181.] Je weiter der Punkt K von L entfernt wird, je näher rückt das Bild k an a, und wenn LK unendlich groß wird, so fällt k in a, daher ist a der Grenzpunkt für die Linie LK, und zugleich Vertiefungspunkt aller Linien in der schiefen Ebene, welche auf der Durchschnittslinie bc winkelrecht stehen, daher er der Hauptpunkt der schiefen Ebene VW, und bc die Grundlinie der schiefen Ebene heißt.

Weil Aa' auf a'c winkelrecht steht, so muß der Hauptpunkt a der schiefen Ebene in einer Linie liegen, welche senkrecht auf der Durchschnittslinie bc steht, und durch den Augenpunkt A der Tafel geht.

§. 218.

1. Zusatz. Die Linie HK in der schiefen Ebene VW, schneide die Durchschnittslinie bc in H, und es sei KL auf bc winkelrecht. Durch den Gesichtspunkt G, werde Gq bis an die Tafel mit HK parallel gezogen, so ist die Ebene Gaq mit der schiefen Ebene VW, also aq mit LH oder mit dem Durchschnitt bc parallel. Das Bild k von K fällt in den Durchschnitt der Linien GK und qH, und wenn HK unendlich groß wird, fällt k in q. Es ist daher q der Vertiefungspunkt aller Linien, welche mit HK parallel sind. Aehnliche Folgerungen erhält man für jede andere Lage der Linie HK. Da nun qa mit bc parallel ist, so folgt hieraus, daß die Vertiefungspunkte aller Parallellinien der schiefen Ebene VW, in eine Linie de fallen, welche durch den Hauptpunkt a, der schiefen Ebene mit dem Durchschnitte bc parallel gezogen wird, weshalb de die Grenzlinie der schiefen Ebene VW ist, und es giebt über de hinaus kein Bild von der schiefen Ebene VW.

Weil aa' auf bc, also auch auf de winkelrecht steht, so findet man aus der Grenzlinie de und dem Augenpunkte A der Tafel, den Hauptpunkt a der schiefen Ebene, wenn Aa auf de winkelrecht gezogen wird.

§. 219.

2. Zusatz. Der Abstand Ga, des Gesichtspunktes G, vom Hauptpunkte a der schiefen Ebene VW, ist die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreiecks,

dessen Katheten der Abstand AG, des Gesichtspunktes vom Augenpunkte, und der Abstand Aa des Augenpunktes vom Hauptpunkte sind. Taf. XVII. Fig. 124.

Mit Hülfe des Abstandes Ga, verfährt man beim Zeichnen der Bilder der schiefen Ebene VW eben so, als wie mit GA, beim Zeichnen der Bilder auf einer wagerechten Grundebene, wovon man sich eben so, wie §. 191 — 195. überzeugt.

Nimmt man daher ao = aG, so kann man mittelst des Hülfspunktes o auf de einen perspektivischen Winkelmesser auftragen, so wie bc zur Skale für die Bilder der schiefen Ebene dient.

§. 220.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung in den vorhergehenden §. §., stehe auf der schiefen Ebene VW, Figur 124., die Linie KM winkelrecht, so findet man den Durchschnittspunkt N, in welchem diese Linie die Tafel BD schneidet, wenn KL senkrecht auf die Durchschnittslinie bc, und LN auf der Tafel mit aa′ parallel gezogen wird. Wo sich alsdann LN und die Verlängerung von KM in N schneiden, liegt der Durchschnittspunkt. Fig. 124.

Man ziehe GK und aL, so ist der Durchschnittspunkt k das Bild von K, und wenn kN gezogen wird, so ist kN das Bild der rechtwinklichten Linie KN. Wird endlich nach irgend einem Punkte M der winkelrechten Linie KN, die Linie GM gezogen, und dadurch der Punkt m in kN bestimmt, so ist km das Bild von KM.

Weil Gg′ auf der schiefen Ebene VW winkelrecht steht, [§. 217.] so ist Gg′ mit KN parallel, und das Bild km von KM, liegt in der Ebene dieser Parallellinien, weil solches in der Ebene KMG liegt. Es muß daher Nk nach R verlängert, die Linie Gg′ in irgend einem Punkte R schneiden, welcher zugleich in der Ebene der Tafel liegt. Da nun R der einzige Punkt ist, in welchem die verlängerte Linie Gg′ die Tafel schneiden kann, so muß das verlängerte Bild von jeder andern, mit KM parallelen Linie, durch den Punkte R gehn, weil alle diese Linien mit Gg′ parallel sind. Daher ist R der gemeinschaftliche Vertiefungspunkt aller Linien, welche auf der schiefen Ebene VW winkelrecht stehen.

Taf. XVII. Fig. 124.

§. 221.

1. Zusatz. Weil Gg' auf g'a' winkelrecht steht, und Ga mit g'a' parallel ist, [§. 217.] so ist aGg' ein rechter Winkel, daher findet man den Vertiefungspunkt R, für alle auf der schiefen Ebene VW winkelrecht stehende Linien, wenn man aA so weit verlängert, bis eine auf Ga winkelrechte Linie GR, die Linie aAR in R schneidet.

§. 222.

2. Zusatz. Durch R und N werde in der nöthigenfalls erweiterten Ebene der Tafel, Rt und Nu mit dem Durchschnitte bc parallel gezogen. Man nehme Rt = RG, ziehe durch t und k die Linie tku bis an Nu, so ist Nu = KN. Denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke GRk und kKN verhält sich

Rk : kN = GR : KN

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke Rtk und kNu

Rk : kN = Rt : Nu oder weil Rt = GR ist,

Rk : kN = GR : Nu. Es war aber

Rk : kN = GR : KN

daher muß Nu = KN seyn.

Auf ähnliche Art beweiset man, wenn durch t und m, die Linie tmm' bis an de gezogen wird, daß Nm' = NM ist. Denn es verhält sich

Rm : mN = GR : NM und

Rm : mN = Rt : Nm'

daher ist Nm' = NM. Aber auch Nu = KN, folglich Nu — Nm' = KN — NM oder um' = KM.

Die Linie um' ist daher das Maaß vom Bilde km, und man kann t als Theilungspunkt der Linie kN ansehn.

Taf. X. Fig. 58. und Fig. 59.

§. 223.

Auf der Tafel BD, Figur 58. und 59., sei BC die Grundlinie, und bc der Durchschnitt der schiefen Ebene bcc'b, mit der Tafel oder die Grundlinie der schiefen Ebene; auch werde vorausgesetzt, daß CD, BE, BB', CC' auf BC, und bb', cc' auf bc winkelrecht stehen. In der Ebene der Tafel werde Ce, und in der schiefen Ebene, eF auf bc senkrecht gezogen, so ist CeF der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Tafel. Wenn daher in der Grundebene BC', die

Linie CF auf BC senkrecht gezogen ist, so muß solche der Linie eF in irgend einem Punkte F begegnen, welcher zugleich in der Durchschnittslinie der schiefen Ebene mit der Grundebene liegt, welches in der Geometrie bewiesen wird. Man verlängere CB und cb, bis sich solche in F′ schneiden, so ist F′ ein zweiter Punkt dieser Durchschnittslinie, daher muß der Durchschnitt der schiefen Ebene mit der Grundebene in die Linie FF′ fallen. Taf. X. Fig. 58. und Fig. 59.

Fällt der Durchschnitt bc, der schiefen Ebene über die Grundlinie BC der Tafel, wie Figur 58., so fällt die Durchschnittslinie FF′ vor die Tafel, und es läßt sich kein Bild derselben auf der Tafel BCDE angeben. Wenn aber der Durchschnitt bc unterhalb BC fällt, wie Figur 59., so läßt sich das Bild vom Durchschnitte FF′ auf der Tafel bestimmen. Man ziehe aus dem Augenpunkte A die Linie AC, so fällt das Bild von CC′ in CA, [§. 183.] also liegt auch das Bild von F in CA. Aus dem Hauptpunkte a ziehe man ae, so liegt das Bild von eF in ea, [§. 219.] folglich muß das Bild f von F, im Durchschnitte der Linien CA und ea also in f liegen, daher ist fF′ das Bild vom Durchschnitte FF′.

§. 224.

Der Mittelpunkt einer Kugel befinde sich in K, Figur 62.; zieht man alsdann aus dem Gesichtspunkte G, nach der Oberfläche der Kugel grade Linien, welche die Kugelfläche berühren, wie GL, GN, so bilden solche die krumme Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze in den Gesichtspunkt G fällt, und dessen Grundfläche die Berührungspunkte wie L, N, in einer auf der Axe GK winkelrechten Kreisfläche schneiden. Die Linie LN ist ein Durchmesser dieser Kreisfläche, deren Mittelpunkt in M liegt. Das Bild von dem Umfange der Kreisfläche LN, ist alsdann dem Bilde von dem Umfange der Kugel gleich, wenn solche aus dem Gesichtspunkte G betrachtet wird, weil sämmtliche Gesichtsstrahlen, welche von der Kugel nach dem Auge kommen, innerhalb des Strahlenkegels LGN fallen. Soll daher das Bild einer Kugel entworfen werden, so kömmt es darauf an, das Bild derjenigen Kreisfläche LN zu finden, deren Umfang mit den Berührungspunkten wie L, N, zusammen fällt. Taf. X. Fig. 60.

Es sei K′H, Figur 125., der vertikale Durchmesser, und K der Mittelpunkt einer Kugel, welche in K′ auf der wagerechten Grundebene BZ steht. Von Tafel XVIII. Fig. 125.

Tafel XVIII. Fig. 125 K′ nach dem Fuß G′ des Gesichtspunktes G, ziehe man die Linie K′G′, welche die Grundlinie BC der Tafel BD in I schneidet; in I errichte man in der Ebene der Tafel auf BC, die senkrechte Linie Ik, so fällt in dieselbe das Bild von IK′ und vom vertikalen Durchmesser K′H. [§. 184. und 205.] Zieht man aus dem Gesichtspunkte G die Linie GK, welche Ik in k schneidet, so ist k das Bild vom Mittelpunkte K der Kugel. In der Vertikalebene GG′K′H, sei KN′HL′ ein größter Kreis der Kugel, welcher die Vertikallinie K′H zum Durchmesser hat. Aus G ziehe man nach diesem Kreise die Berührungslinie GL′, GN′, so ist LN′ der Durchmesser, und M der Mittelpunkt von derjenigen Kreisfläche N′LL′N, welche als Grundfläche des Strahlenkegels GL′N′, zur Entwerfung des Bildes von der Kugel dient. Weil die Vertikalebene GG′K′K auf der Kreisfläche NN′L′ und auf der Grundebene BZ winkelrecht steht, so ist solche die Neigungsebene dieser beiden Flächen. Wird daher MN′ bis an die Linie G′K′ in R verlängert, so ist MRK′ der Neigungswinkel der Kreisfläche NN′L′ gegen die Grundebene BZ. In der nöthigen Falls erweiterten Grundebene, ziehe man aus R die Linie RF′ auf G′K′ winkelrecht, so steht solche auch auf RM winkelrecht, und fällt in die erweiterte Kreisfläche NN′L′, daher ist RF′ die Durchschnittslinie der Kreisfläche NN′L′ mit der Grundebene BZ. Verlängert man die Grundlinie CB der Tafel, bis solche die Linie RF′ in F′ schneidet, so ist F′ ein Punkt, welcher in der Ebene der Tafel, und in der erweiterten Ebene der Kreisfläche NN′L′ liegt.

Durch GA und GM lege man eine Ebene, welche die erweiterte Kreisfläche NN′L′ in der Linie LMNR′ schneiden mag, so steht diese Ebene auf der Tafel BD und auf der Kreisfläche NN′L′ winkelrecht, weil AG auf der Tafel und GM auf der Kreisfläche winkelrecht ist. Die Ebene AGM ist daher Neigungsebene der Kreisfläche NN′L′ gegen die Tafel, und wenn man in dieser Neigungsebene die Linie Ak und MR′ bis a′ verlängert, so ist Ma′k der Neigungswinkel der Kreisfläche NN′L′ gegen die Tafel. Die Punkte a′ und F′ liegen daher in der erweiterten Kreisfläche NN′L′ und in der Ebene der Tafel, daher ist a′F′ eine Durchschnittslinie beider Flächen, und weil die Ebene des Neigungswinkels zweier Flächeu auf ihrem Durchschnitte winkelrecht stehen muß, so ist a′F′ auf a′k winkelrecht.

Sobald daher die Lage der Punkte A, k, L, N, welche in einerlei Ebene

liegen, bekannt ist, so kann man durch die Verlängerung von Ak und LN den Punkt a′ finden, und wenn man in der erweiterten Ebene der Tafel durch a′ auf a′k eine Linie a′F′ senkrecht zieht, so ist solche die Durchschnittslinie der Kreisfläche NN′L′ mit der Tafel. Tafel XVIII. Fig. 125.

§. 225.

Soll nun den Ausmittelungen des vorigen §. gemäß, das Bild einer gegebenen Kugel auf der Tafel, Figur 62., entworfen werden, so sei A der Augenpunkt, und k das Bild vom Mittelpunkte der Kugel, welches gegeben ist. Auf Ak nehme man AG winkelrecht, und dem Abstande des Gesichtspunktes vom Augenpunkte gleich, auch werde GA und Gk unbestimmt nach s und K verlängert. Man nehme AS, dem Abstande des Mittelpunktes der Kugel von der Tafel gleich, also AS = K′F, Figur 125., ziehe SK auf GS winkelrecht, so ist der Durchschnittspunkt K der Linie SK und Gk, der Mittelpunkt der gegebenen Kugel, welcher gegen die Punkte k, A, G eben die Lage hat, wie K, Figur 125., gegen die dortigen Punkte k, A, G. Aus K, Figur 62., beschreibe man mit dem gegebenen Halbmesser KL der Kugel einen Kreis, ziehe nach demselben aus G die Berührungslinien GL, GN, und durch die Punkte L, N, die Linie LNa′, welche die verlängerte Linie Ak in a′ schneidet, so ist eine durch a′ auf Aa′ gezogene winkelrechte Linie Va′W, die Durchschnittslinie der Tafel mit der abzubildenden Kreisfläche. Taf. X. Fig. 62.

Aus G ziehe man Ga mit Ma′ parallel, bis solche die verlängerte Linie a′A in a schneidet. Nun ist Ga mit Ma′ parallel, also der Winkel GaA, dem Neigungswinkel Ma′A der schiefen Ebene gleich, daher [§. 207.] ist a der Hauptpunkt der schiefen Ebene, und man kann mit Hülfe desselben und mittelst der Durchschnittslinie VW, das Bild der Kugel leicht entwerfen, weil l und n die Bilder von den Punkten L und N sind.

§. 226.

Statt nach §. 207., die Tafel BD, Figur 124., vertikal, und die schiefe Ebene VW gegen den Horizont geneigt anzunehmen, kann man sich auch vorstellen, daß die schiefe Ebene VW als Grundebene horizontal liege, und die Tafel BD, bei unverändertem Neigungswinkel aa′f, in eine gegen den Horizont geneigte Lage komme, und weil auch in diesem Falle bei einer geneigten Tafel, die Lage Tafel XVIII. Fig. 124.

Tafel XVIII. Fig. 124. des Gesichtspunktes G, gegen diese Tafel unverändert bleibt, so müssen auch noch alle die Sätze gelten, welche §. 207. bis 222. entwickelt sind, und man kann solche auch unter ähnlichen Umständen auf geneigte Tafeln anwenden.

§. 227.

Beweis zu §. 98. und 99.

Taf. VIII. Fig. 57. Die Vertikallinien HK, LN, L′N′, Figur 57., haben die Höhe des Auges über der Tafel zu ihrem Maaße, [§. 205.] und weil alle perspektivische Fuße von einerlei Vertikallinien gleich groß sind, auch die mit der Grundlinie parallelen Linien, mit den darüber befindlichen Vertikallinien, gleich große perspektivische Fuße haben, so folgt hieraus die Richtigkeit der gegebenen Auflösungen.

§. 228.

Beweis zu §. 100. und 101.

Taf. VII. Fig. 50. Aus der Eintheilung, Figur 50., folgt, daß

$O7 = \frac{6}{7}\,OZ$; $O8 = \frac{6}{8}\,OZ$; $O9 = \frac{6}{9}\,OZ$; $O10 = \frac{10}{9}\,OZ$; .... $O14 = \frac{6}{14}\,OZ$; u. s. w. ist. Es verhält sich daher

$$O11 : O14 = \tfrac{6}{11} : \tfrac{6}{14} \text{ oder } O11 : O14 = 14 : 11$$

Tafel XVIII. Fig. 126. oder die Abstände O14 und O11 verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Zahlen. Oefnet man daher den Proportionalzirkel ZOZ′, Figur 126., so verhält sich auch

$$xx' : yy' = 14 : 11$$

also die Weiten xx′, yy′ umgekehrt, wie die zugehörigen Zahlen.

Fig. 127. Nun sei VW, Figur 127., eine auf der Tafel BD senkrechte Linie, A der Augenpunkt, G der Gesichtspunkt und Vw das Bild von VW, so verhält sich

$AG : VW = Aw : wV$ oder

$AG + VW : AG = AV : Aw$

oder $AG = 11$ und $VW = 3$ Fuß angenommen

$14 : 11 = AV : Aw$ daher auch

$xx' : yy' = AV : Aw.$

Nimmt man daher die Weite $xx' = AV$, so ist $yy' = Aw$, wobei zu bemerken ist, daß die Zahlen bei x, x′ auf dem Proportionalzirkel, der Anzahl der Fuße des Augenabstandes entsprechen.

Beweise zum zweiten Abschnitte. Taf. XII.

§. 229.

Der Schatten, welchen der Punkt n, Figur 70., auf den wagerechten Boden Fig. 70. wirft, muß in einer Linie ln′ liegen, welche durch n und den leuchtenden Punkt l geht (§. 109.). Da nun der Schatten auch auf dem Boden liegen muß, so muß solcher dahin fallen, wo die Linie ln den Boden durchschneidet. Durch die Vertikallinien lk, nm, welche in k und m auf dem Boden stehen, lege man eine hinlänglich erweiterte Ebene, welche den Boden in der verlängerten Linie kmn′ schneidet. In eben dieser Ebene liegt auch die Linie ln, daher ist, wenn sich beide Linien ln und km in n′ schneiden, n′ ein Punkt, welcher sowohl in der Linie ln, als auch auf dem Boden liegt, folglich der gesuchte Schatten.

Auf gleiche Art beweiset man, daß n′, Figur 71., der Schatten von n ist. Fig. 71.

Von jedem Punkte der Vertikallinie mn, Figur 70., läßt sich eben so beweisen, daß sein Schatten in der Linie mn′ liegen muß, woraus folgt, daß mn′ der Schatten von mn ist.

§. 230.

Beweis zu §. 116.

Wäre die schiefe Ebene abcd, Figur 72., nicht vorhanden, so ist me Fig. 72. der Schatten von mn auf dem wagerechten Boden. Wo nun die Linie ne die schiefe Ebene abcd schneidet, da muß auf derselben der Schatten von n liegen. Da sich nun das vertikale Dreieck ofg, mit dem vertikalen Schattendreiecke nme in einerlei Ebene befindet, so müssen auch die Linien ne und og in einerlei Ebene liegen, und der Durchschnittspunkt n′ fällt alsdann in die schiefe Ebene abcd und in die Linie ne, also ist n′ der Schatten vom Punkte n, und mon′ der Schatten der Linie mn.

§. 231.

Beweis zu §. 117.

2. Fall. Durch die verlängerten Linien lv und ku, Figur 71., lege man Fig. 71. eine Ebene, welche zugleich die vertikale Schattenebene ist. Aber wv′ ist vertikal, und liegt daher in derselben Ebene, folglich ist uwv′ der gesuchte Schatten.

Taf. XII. Fig. 71. 3. Fall. Eine Ebene durch die verlängerten Linien km, ln, Figur 71., gelegt, ist eine vertikale Schattenebene, daher müssen auch die Vertikallinien kk′, mm′ in derselben liegen. Die Linie k′m′p ist alsdann die Durchschnittslinie, in welcher die Schattenebene die Decke schneidet, und die Vertikallinie po liegt zugleich in der Schattenebene und in der Wand B′C′D′E′, daher ist mopn′ der gesuchte Schatten.

§. 232.

Wird der Schatten einer graden Linie an mehreren Wänden gebrochen, wie Figur 74., so stelle man sich jede einzelne Wand hinlänglich erweitert vor, suche auf derselben den Schatten, so erhält man zugleich den Schatten, welcher auf die Fig. 74. gegebene Wand fällt, woraus sich das Verfahren für den zweiten und dritten Fall, §. 118. hinlänglich erläutert.

§. 233.

Die Tafel BCDE, Figur 128., stehe auf der wagerechten Grundebene Tafel XVIII. Fig. 128. YZ, und auf beiden die Vertikalfläche AA′G′G des Auges winkelrecht. Durch das Licht L, werde mit AA′G′G parallel eine Vertikalebene KLK′L′ gelegt, welche die Tafel in K′L′, und die Grundebene in KK′ schneidet. Man ziehe LK vertikal, so ist K der Fuß des Augenpunktes. Durch G′ und K ziehe man G′Kh bis an BC, so wird eine durch KG′GL gelegte, hinlänglich erweiterte Ebene, die Tafel in der Vertikallinie hl schneiden. Nun liegt das Bild von L in der Verlängerung von GL und in der Tafel, also in l. Verlängert man lh nach k, so liegt das Bild von K in der Verlängerung von GK und in der erweiterten Ebene der Tafel, also in k.

Indem man ferner lA zieht, so muß L′ in dieser Linie liegen, weil die Dreiecke hG′A′ und hKK′, die Projektionen von lGA und lLL′ sind. Aus gleichen Gründen muß die Linie Ak durch K′ gehn, weil die Dreiecke hG′A′ und hKK′ die Projektionen von kGA und kKK′ sind. Wenn daher die Lage der Punkte G, K und L′ gegeben ist, so kann man leicht h, ferner l durch die Verlängerung von AL′ und k durch die Verlängerung von AK′ finden. Dabei mag die Ebene BCZ wagerecht oder vertikal seyn, wenn nur die Punkte G′ und K, gegen BC dieselbe Lage behalten.

§. 234. Tafel XVIII.

Auf der wagerechten Grundebene YZ, Figur 129., stehe die Tafel CDEK′ Fig. 129.
senkrecht, und durch den Gesichtspunkt G, und das hinter demselben befindliche Licht L, lege man Vertikalebenen LKK′L′ und GG′A′A, welche zugleich auf der Tafel winkelrecht stehen. Auch sei GG′ die Höhe des Gesichtspunktes, und LL′ die Höhe des Lichts über der Grundebene. Durch die Fußpunkte K, G′, ziehe man die Linie KG′N′, bis an die nöthigenfalls verlängerte Grundlinie der Tafel, und errichte in N′ die Vertikallinie NM, so liegt solche in der Ebene der Tafel. Wird nun KG verlängert, so muß solche die Linie MN in irgend einem Punkte M schneiden, weil MN′, N′K und GG′ in einerlei Ebene liegen. Verlängert man LG, so muß solche die MN, aus gleichen Gründen in irgend einem Punkte N schneiden. Nun liegen die Punkte N und M in der erweiterten Ebene der Tafel, und weil man das Bild eines Gegenstandes findet, wenn man durch denselben und den Gesichtspunkt eine Linie zieht, so kann man N das **rückwärts verlängerte Bild** des Lichtes L, und M das rückwärts verlängerte Bild vom Fuße des Lichts nennen.

Zieht man die Linien MK′ und NL′, so müssen solche durch den Augenpunkt A gehn; denn die Dreiecke N′K′K und N′A′G′ sind Projektionen von MK′K und MAG, daher geht MK′ durch A, so wie die Dreiecke N′K′K und N′A′G′ Projektionen von NL′L und NAG, daher geht NL′ durch A. Sind also die Punkte N′, K′, L′ in der Ebene der Tafel nebst dem Augenpunkte A bekannt, so lassen sich leicht die Punkte M und N durch Zeichnung finden, so wie man mittelst der Lage der Fußpunkte K und G′, den Punkt N′ leicht finden kann.

§. 235.

In der nöthigenfalls erweiterten Ebene der Tafel CDEK′, Figur 129., sei Fig. 129.
N das rückwärts verlängerte Bild des Lichtes L, und M das rückwärts verlängerte Bild vom Fuße K desselben.

Hinter der Tafel befinde sich eine vertikale Stange VW, deren Bild auf der Tafel vw vorgestellt wird. Der geometrische oder wahre Schatten der Stange VW wird gefunden, wenn durch K und V, die Linie KVW′, und durch L und W, die Linie LWW′, bis zu ihrem Durchschnitte in W′ gezogen wird, da alsdann VW′ der geometrische Schatten von VW ist. Nun liegt der geometrische Schatten in einer Linie, welche durch den Fußpunkt K und durch V geht, daher

Tafel XVIII Fig. 129. muß auch das Bild des Schattens auf der Tafel in einer Linie liegen, welche durch das Bild M von K, und durch das Bild v von V geht, folglich muß das Bild des Schattens in der Linie vM liegen. Die Verlängerung der Linie LW, durch das Licht L und den Punkt W, giebt die Grenze W′ des wahren Schattens, daher muß auch die verlängerte Linie Nw, welche durch das Bild N des Lichts, und durch das Bild w des Punktes W geht, die Grenze w′ vom Bilde des Schattens bestimmen. Es ist daher vw′ das Bild des Schattens der Linie vw, und man kann M den Vertiefungspunkt und N den Grenzpunkt der Schattenlinie nennen.

§. 236.

Taf. XIII. Fig. 82. Die Lage der Sonne S, Figur 82., sei nach §. 131. bestimmt, und man ziehe nach dem Fuße K′ der Sonne, die Linie GK′, welche die Tafel in der Linie T′s in k schneidet, so ist k das Bild vom Fuße K′ der Sonne. Je weiter sich K′ von der Tafel entfernt, desto mehr rückt das Bild k nach dem Horizonte in K, und weil der Punkt K′ als unendlich weit von der Tafel angenommen werden kann, so fällt das Bild vom Fuße der Sonne in den Horizont bei K. Weil die Linie T′s in der Vertikalebene der Sonne, und in der Ebene der Tafel liegt, so ist s das Bild der Sonne auf der Tafel. Das Bild K vom Fuße der Sonne liegt im rechtwinklichten Dreieck AGK, dessen eine Seite AG dem Augenabstande, und dessen Winkel AGK der Sonnenabweichung gleich ist. Auch liegt das Bild s der Sonne in einem rechtwinklichten Dreieck KGs, dessen Seite KG, Seite des Dreiecks AGK, und dessen Winkel KGs der Sonnenhöhe gleich ist. Sobald daher der Augenpunkt A, der Augenabstand AG, nebst der Abweichung und Höhe der Sonne gegeben sind, kann die Lage der Punkte K und s bestimmt werden.

Fig. 83. Wäre, Figur 83., S das Bild der Sonne, K das Bild ihres Fußes im Horizonte DE, und nm das Bild einer vertikalen Stange, so findet man den Schatten mn′ der Stange nm, wenn durch Km und Sn, die Linien Kn′ und Sn′ bis n′ gezogen werden, [§. 229.] daher ist K der Vertiefungspunkt und S der Grenzpunkt des Schattens (§. 127.).

§. 237.

Wird die Abweichung der Sonne ein rechter Winkel, so fällt die Sonne in die erweiterte Ebene der Tafel, und jede vertikale Stange wirft einen Schatten,

welcher mit der Grundlinie der Tafel parallel ist, weil man die Sonne als unendlich weit von der Tafel entfernt annehmen kann. Wegen dieser großen Entfernung sind daher auch alle Sonnenstrahlen, durch welche der Schatten eines Körpers begrenzt wird, mit einander parallel. Wenn daher nm, qr, Figur 85., Bilder von vertikalen Stangen sind, so müssen die Schatten mn′, pq′ derselben, mit der Grundlinie BC parallel laufen, und wenn nn′, qq′, die Richtungen der parallelen Sonnenstrahlen sind, so muß der Winkel mn′n dem Winkel pq′q gleich, und jeder derselben dem Winkel gleich seyn, welcher die Sonnenhöhe über dem Horizonte bestimmt, indem alle Schattendreiecke wie mnn′, pqq′ deshalb einander ähnlich werden, weil sie in Ebenen liegen, welche mit der Tafel parallel sind (§. 54.). Taf. XIII. Fig. 85.

§. 238.

Steht die Sonne vor der Tafel BCDE, Figur 130., ist GG′N′K ein Theil von der durch die Sonne und den Gesichtspunkt G gehenden Vertikalebene, welche den Horizont DE in K schneidet, und man verlängert die wagerechte Linie KG nach K′, so ist der stumpfe wagerechte Winkel AGK′, die Abweichung der Sonne von der Vertikalebene des Auges. Die Linie GK′ ist eine in der Vertikalebene der Sonne gelegene Horizontallinie, und wenn SG, ein durch den Gesichtspunkt G gehender Sonnenstrahl ist, so bestimmt der Winkel SGK′ die Höhe der Sonne über dem Horizonte. Man verlängere den Sonnenstrahl SG nach N, so fällt diese Verlängerung in die Vertikalebene GG′N′K, also wird der Strahl SGN die verlängerte Linie KN′ in N schneiden und N ist ein Punkt in der Ebene der Tafel, oder das rückwärts verlängerte Bild der Sonne, welches man auch den Nadir der Sonne nennt. Eben so kann man K das rückwärts verlängerte Bild vom Fuß der Sonne nennen. Weil die Winkel SGK′ und KGN einander gleich sind, so kann man mit Hülfe des Augenabstandes AG, der Abweichung und Höhe der Sonne, auf jeder gegebenen Tafel, das rückwärts verlängerte Bild N der Sonne finden. Denn es sei BCDE, Figur 91., die gegebene Tafel, AO der Augenabstand und der Winkel AOK′ die Abweichung der Sonne, auch werde K′O bis K verlängert, so ist das Dreieck AOK dem Dreiecke AGK, Figur 130., gleich, also K, Figur 91., das Bild vom rückwärts verlängerten Fuß der Sonne. Man nehme KG′ = KO, errichte in K die Vertikallinie KN, und nehme den Tafel XVIII. Fig. 130. Taf. XIV. Fig. 91.

Tafel XVIII. Fig. 130. Winkel K G′N der Sonnenhöhe gleich, so ist das Dreieck K G′N eben so groß, als K G N, Figur 130., daher N, Figur 91., das rückwärts verlängerte Bild der Sonne.

Es sei V W, Figur 130., eine vertikale Stange, welche in die Ebene der Tafel fällt, so ist V X ihr wahrer oder geometrischer Schatten auf der Grundebene, wenn V X mit G′N′, und W X mit G S parallel ist. Denn weil die Sonne in der erweiterten Vertikalebene G G′N′K steht, so fällt der wahre Schatten von G′G nach der Richtung G′N′, und weil wegen der großen Sonnenferne alle Schattenlinien von vertikalen Stangen mit einander parallel seyn müssen, so ist auch N′G′ mit V X parallel. Auch sind wegen der großen Sonnenferne die Sonnenstrahlen, welche den Schatten eines Körpers begrenzen parallel, daher S G mit W X parallel. Will man das Bild V W′, von dem geometrischen Schatten V X auf der Tafel B C D E angeben, so ziehe man aus X auf B C die senkrechte Linie X X′; von X′ nach A die Linie X′A, und von X nach G die Linie X G, so ist im Durchschnittspunkte beider Linien, in W′, das Bild von X, also die Linie V W′ das Bild von dem geometrischen Schatten V X.

Man ziehe k w′, so verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke A G W′ und W′X X′

$$AW' : W'X = AG : XX'$$

und weil X V mit N′G′ also auch mit K G, und X X′ mit A G parallel ist, so sind die Dreiecke A G K und V X X′ ähnlich, daher verhält sich

$$AK : VX' = AG : XX' \text{ folglich}$$

$$AK : VX' = AW' : W'X.$$

Da nun V X′ mit A K parallel ist, so sind die Dreiecke A K W′ und V X′ W′ einander ähnlich, und weil A W′X′ eine grade Linie ist, so muß auch K W′V eine grade Linie seyn, oder die grade Linie K V muß durch den Punkt W′ gehen, daher ist K der Vertiefungspunkt des Schattens.

Man ziehe die Linien W W′ und N W′, so verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke K C N und V W X

$$KN : VW = KG : VX$$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke G K W′ und V X W′

$KW' : W'V = KG : VX$ folglich Tafel XVIII. Fig. 130.
$KN : VW = KW' : W'V$

Nun ist KN mit VW parallel, also die Dreiecke KNW′ und VWW′ einander ähnlich, und weil VK eine grade Linie ist, so muß auch NW′W eine grade Linie seyn, oder die grade Linie NW geht durch W′, daher ist N der Grenzpunkt des Schattens.

Von jeder andern Vertikallinie VW, welche in die Ebene der Tafel fällt, ist daher K der Vertiefungs-, und N der Grenzpunkt des Schattens. Weil ferner von jeder andern Vertikallinie welche hinter der Tafel steht, die Schattenlinie ebenfalls mit der Schattenlinie von VW parallel seyn muß, so haben alle Schatten vertikaler Linien einen gemeinschaftlichen Vertiefungs- und Grenzpunkt.

Beweise zum dritten Abschnitte.

§. 239.

Es sei LMN, Figur 131., ein ebener Spiegel, und vor demselben ein Gegenstand oder strahlender Punkt V. Man ziehe von V auf die Spiegelfläche die winkelrechte Linie VQ, so wird in der Katoptrik bewiesen, das man das Bild v von V im Spiegel, in der Verlängerung VQ eben so tief hinter der Spiegelfläche sieht, als V vor derselben liegt, oder daß $vQ = QV$ sei. Fig. 131.

§. 240.

1. Zusatz. Liegt der Spiegel wagerecht, so sind alle auf denselben winkelrechte gezogene Linien vertikal. Bei der perspektivischen Abbildung einer Vertikallinie, haben alle gleich große Theile derselben einerlei geometrisches Maaß

Tafel XVIII. Fig. 131. (§. 47.), daher wird in der perspektivischen Zeichnung, das Bild irgend eines, über dem wagerechten Spiegel befindlichen Punktes, eben so weit von der Spiegelfläche abstehen, als dieser Punkt vom Spiegel entfernt ist, weil hier keine perspektivische Verkürzungen vorkommen.

§. 241.

2. Zusatz. Alle winkelrechte Linien, die man auf einen vertikalen Spiegel, welcher die Tafel unter einem rechten Winkel schneidet, fällen kann, sind wagerechte, mit der Tafel parallele Linien, weshalb in der perspektivischen Abbildung dieser Linien gleich große Theile, gleiches geometrisches Maaß haben (§. 29.). Es wird daher in der perspektivischen Zeichnung das Bild irgend eines Punktes, hinter dem angenommenen vertikalen Spiegel eben so weit von der Spiegelfläche abstehen, als der Abstand dieses Punktes vom Spiegel beträgt.

§. 242.

Taf. XVI. Fig. 101. Vom vertikalen Rechteck $FGG'F'$, Figur 101., ist $F'G'gf$ das Bild im wagerechten Spiegel $BB'C'C$, weil $FF' = F'f$, $GG' = G'g$ und Ff, Gg vertikale Linien sind. Treffen nun die wagerechten Linien FG, $F'G'$ in den gemeinschaftlichen Punkt A, so muß auch fg in diesen Punkt A treffen, weil $F'f = FF'$ und $G'g = GG'$ ist.

§. 243.

Tafel XVIII. Fig. 131. Befindet sich das Auge eines Beobachters oder der Gesichtspunkt in G, Figur 131., und es ist v das Bild des Punktes V im Spiegel [§. 239.], so wird dem Auge in G, das Bild v von V, in der Linie Gv erscheinen. Man ziehe von G die winkelrechte Linie Gg auf die Spiegelfläche, so wird die Linie gQ auf der Oberfläche des Spiegels, die Linie Gv in v' schneiden, und das Auge in G, wird das hinter dem Spiegel befindliche Bild v eben so sehen, als wenn solches auf der Oberfläche des Spiegels in v' befindlich wäre. Mit Rücksicht auf den Gesichtspunkt G, kann man daher das Bild v' **auf dem** Spiegel, von dem Bilde v **hinter dem** Spiegel unterscheiden. Auf eben diese Art ist g das **Bild vom Gesichtspunkte** auf dem Spiegel, und wenn man Q den

An-

Anfallspunkt auf dem Spiegel vom Gegenstande V nennt, so folgt hieraus, daß das Bild v' auf dem Spiegel, von irgend einem Gegenstande V, in derjenigen Linie gQ liegen muß, welche man vom Bilde g, des Gesichtspunktes auf dem Spiegel, nach dem Anfallspunkte Q des Gegenstandes zieht. Tafel XVIII. Fig. 131.

In der angeführten Figur ist der Spiegel vertikal angenommen worden, obgleich der vorstehende Satz für jede Lage des Spiegels gilt.

§. 244.

Anstatt die Tafel wie bisher von der Seite anzusehen, denke man sich eine Ansicht von oben, indem man die Tafel durch eine wagerechte Ebene schneidet, welche durch den Horizont und den Gesichtspunkt geht. Es sei nun in dieser wagerechten Ebene G, Figur 132., der Gesichtspunkt, A der Augenpunkt, bc der Durchschnitt der Tafel oder der Horizont, und hinter der Tafel befinde sich eine Vertikalebene, welche von der angenommenen wagerechten Ebene in der Linie mp geschnitten wird. Schneidet nun die mit mp gezogene Parallellinie Ga den Horizont in a, so ist a der Vertiefungspunkt auf der Tafel für die Linie mp [§. 182.], oder es ist auch a der Hauptpunkt derjenigen Vertikalebene, von welcher mp der Durchschnitt ist (§. 53.). Aus dem Gesichtspunkte G, werde eine winkelrechte Linie Gm auf mp gezogen, welche die Tafel in g schneidet, so ist aGg ein rechter Winkel, und g ist zugleich ein Bild auf der Tafel, in welchem eine winkelrechte Linie Gm, die Vertikalebene mp schneidet. Wäre mp ein Spiegel, so ist g das Bild vom Gesichtspunkte auf dem Spiegel [§. 243.], und wenn der Hauptpunkt a, der Vertikalebene oder des Spiegels mp, und der Abstand des Gesichtspunktes G, vom Augenpunkte A gegeben ist, so darf man nur aus G auf Ga eine winkelrechte Linie Gg ziehen, bis solche den Horizont bc in g schneidet, so ist g das Bild des Gesichtspunktes auf dem Spiegel. Fig. 132.

Weil der Winkel aGg ein rechter ist, so müssen auch auf dem perspektivischen Winkelmesser von a bis g, 90 Grad enthalten seyn.

§. 245.

Tafel XVIII. Fig. 131. Aus dem Gesichtspunkte G, Figur 131., fälle man auf den wagerechten Boden, worauf der Spiegel LMNG steht, ein Perpendikel GG′, so ist G′ der Fuß vom Gesichtspunkte G. Sein Bild liegt eben so tief hinter dem Spiegel, als G′ vor dem Spiegel ist [§. 239.]. Wenn daher eine durch GG′g gelegte Vertikalebene GG′gL, den Spiegel in der Linie gL schneidet, so wird von G aus, das Bild von G′, in einer Linie Gg′ gesehen, welche durch die Mitte g′ von gL geht, oder g′ ist das Bild vom Fuße G′, des Gesichtspunktes auf dem Spiegel.

§. 246.

Fig. 133. Der vertikale winkelrechte Spiegel LMNg, Figur 133., stehe auf einem wagerechten Boden, so daß LM die Durchschnittslinie des Spiegels, mit dem Boden bezeichnet. Vor dem Spiegel befinde sich in G das Auge oder der Gesichtspunkt, und in V ein Gegenstand oder strahlender Punkt. Aus G und V ziehe man auf den wagerechten Boden die Perpendikel GG′ und VW, und auf den Spiegel die winkelrechten Linien Gg und VQ, so ist G′ der Fuß des Gesichtspunktes, W der Fuß des Gegenstandes V, g das Bild des Gesichtspunktes auf dem Spiegel, und Q der Anfallspunkt des Punktes V. In der Verlängerung VQ, nehme man Qv = QV, so ist v das Bild von V **hinter** dem Spiegel [§. 243.]. Man ziehe gQ und Gv, so liegt im Durchschnittspunkte dieser beiden Linien das Bild v′ von V **auf** dem Spiegel [§. 243.], und weil Gg mit Vv parallel ist, so liegen die Linien Gg, Vv, Gv in einerlei Ebene; wenn man daher gV zieht, so muß auch diese Linie mit Gv in einerlei Ebene liegen, also schneiden sich beide Linien in r, und aus G gesehen, wird der Punkt r den Punkt v decken. Hieraus folgt:

I. wenn man aus dem Bilde g des Gesichtspunktes G auf dem Spiegel, eine Linie gV, nach dem strahlenden Punkte V zieht, so muß das Bild v von V in dieser Linie gV gesehen werden.

Es sei w das Bild von W hinter dem Spiegel, und man ziehe die Linie G′w, welche die Linie LM in s schneidet; auch werde die Linie LW von G′w in t geschnitten. Man ziehe sv′ und tr, so sind beide Linien vertikal; denn sv′ ist die Durchschnittslinie der Vertikalebene GG′wv mit dem Spiegel gLMN,

und tr ist die Durchschnittslinie der Vertikalebenen $gLWV$ und $GG'wv$. Ferner werde gL in zwei gleiche Theile in g' getheilt, so ist g' das Bild vom Fuße des Gesichtspunktes auf dem Spiegel, und wenn man die Linie $g'W$ zieht, so wird solche rt in x schneiden, weil beide Linien in der Ebene $gLWV$ liegen. Tafel XVIII. Fig. 133.

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $G'Lt$ und twW verhält sich

$G'L : wW = tG' : tw$ oder

$G'L : 2Mw = sG' - ts : tw$; daher ist $tw = \frac{2Mw}{G'L}(sG' - ts)$.

Ferner sind die Dreiecke $G'Ls$ und Msw ähnlich, daher

$G'L : Mw = sG' : sw$, also $sw = \frac{Mw}{G'L} . sG'$.

Aber $ts = tw - sw$, daher

$$ts = \frac{2Mw}{G'L}(sG' - ts) - \frac{Mw}{G'L} . sG' = \frac{Mw}{G'L}(sG' - 2ts).$$

Hieraus findet man

$$\frac{st}{sG'} = \frac{Mw}{2Mw + G'L}.$$

Es verhält sich aber auch

$Wt : WL = wW : wW + G'L$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke Wtx und WLg'

$Wt : WL = tx : Lg'$, daher

$tx : Lg' = wW : wW + G'L$ oder

$tx : \frac{1}{2} G'G = 2Mw : 2Mw + G'L$. Daher

$\frac{tx}{G'G} = \frac{Mw}{2Mw + G'L}$, folglich ist

$\frac{st}{sG'} = \frac{tx}{G'G}$ oder es verhält sich

$st : sG' = tx : G'G$.

Man ziehe die Linien Gx und xs, so muß Gxs eine grade Linie seyn, weil sich verhält $st : sG' = tx : G'G$. Aus dem Gesichtspunkte G gesehen, wird daher der Punkt x in der Linie $g'W$ den Punkt s decken, oder mit dem-

Tafel XVIII. Fig. 133. selben zusammen fallen. Da nun s in der Vertikallinie v's und in LM liegt, so folgt hieraus:

II. wenn man aus dem Bilde g', vom Fuße des Gesichtspunktes auf dem Spiegel, eine Linie g'W, nach dem Fuße W eines strahlenden Punktes V zieht, so wird diese Linie denjenigen Punkt decken, in welchem ein Perpendikel v's, von dem Bilde v', des strahlenden Punktes auf dem Spiegel, den wagerechten Boden (in s) schneidet.

Beweise zum vierten Abschnitte.

§. 247.

Von allen Punkten der Oberfläche, eines hinter der vertikalen Tafel befindlichen Körpers als Gegenstand, denke man sich die mit einander parallelen Gesichtsstrahlen, welche die Tafel durchschneiden, und dadurch das Bild auf der Tafel bestimmen, so bilden die Strahlen, welche von jeder Fläche des Körpers kommen, ein Prismen, dessen Grundfläche die Fläche des Körpers ist, welches aber von der Tafelfläche, unter irgend einem Winkel durchschnitten wird. Wenn daher die Linien eines Gegenstandes mit der Grundlinie parallel sind, oder auf der wagerechten Grundebene senkrecht stehen, so sind auch ihre Bilder mit der Grundlinie parallel oder darauf senkrecht, und eben so müssen die Bilder aller Parallellinien eines Gegenstandes unter sich auf der Tafel parallel seyn. Aus dieser Betrachtung überzeugt man sich auch eben so leicht, daß die Bilder von allen Linien, welche mit der Tafel parallel laufen, eben so groß sind, als die ihnen entsprechenden Linien des Gegenstandes, weil man sich nur durch die Endpunkte der Linien des Gegenstandes, die

parallelen Gesichtsstrahlen denken darf, so entstehet ein Parallelogramm, in welchem die gegenüberstehenden Seiten nothwendig gleich groß sind. Taf. XVI. Fig. 107.

§. 248.

Eben so wie §. 196., sei GQ, Figur 107., ein Gesichtsstrahl, A der Augenpunkt, der Winkel AO′R die Abweichung des Auges, von einer auf der Tafel BCDE winkelrechten Ebene AO′O″A′, RO′Q die Höhe des Auges, und Q der zweite Hülfspunkt. In der wagerechten Grundebene YZ sei ein Punkt M gegeben, und man ziehe MK bis an die Grundlinie BC der Tafel, mit RO′ parallel, und Km in der Ebene der Tafel auf BC winkelrecht, so ist eine durch MKm gelegte Ebene mit der Vertikalebene O′QR des Auges parallel. Zieht man daher Mm mit O′Q parallel, so wird Mm die Linie Km in m schneiden, und die Dreiecke mMK und O′QR sind ähnlich. Auch ist m das Bild von M, weil Mm mit dem Gesichtsstrahl GQ parallel ist, und die Tafel in m schneidet.

Wird ML in der Grundebene auf die Grundlinie BC winkelrecht gezogen, so ist ML mit AO′ parallel, und die Dreiecke KLM und AO′R sind ähnlich. Man ziehe mL und AQ, so sind wegen Aehnlichkeit der umgebenden Dreiecke, die Pyramiden mKLM und QAO′R einander ähnlich, daher der Winkel mLK = QAR, also AQ mit mL parallel. Aber mL ist das Bild der auf BC winkelrechten Linie ML, und weil für jeden andern Punkt wie M, ähnliche Folgerungen entstehen, so wird das Bild Lm, einer jeden auf der Grundlinie BC senkrechten Linie LM, mit AQ parallel seyn.

Aus M ziehe man willkürlich die Linie MN, bis an die Grundlinie BC. Ferner ziehe man Nm, so ist diese das Bild von NM. Durch O′ werde mit NM die Linie O′P parallel gezogen, so schneidet solche den Horizont DE in P, weil MN wagerecht ist, daher sind die Dreiecke AO′P und LMN ähnlich. Wird QP gezogen, so sind auch die Pyramiden AO′PQ und LMNn ähnlich, also auch die Dreiecke APQ und LMm, folglich das Bild Nm mit QP parallel.

Taf. XVI. Fig. 107. Nun ist der Winkel LNM das Maaß des perspektivischen Winkels LNm; aber der Winkel LNM = APO′, daher APO′ das Maaß von LNm, oder der Winkel APO′ = LNm. Man nehme AO = AO′, ziehe OP, und durch O die Linie Oz mit DE parallel, so ist das Dreieck AOP = AO′P, also der Winkel APO = APO′ = zOP, daher auch zOP = LNm. Nimmt man daher O als Hülfspunkt eines perspektivischen Winkelmessers, von welchem man die Grade auf DE trägt, so findet man das Maaß eines jeden Winkels LNm, wenn man mit Nm durch Q, die Parallele QP und durch P die Linie PO zieht, da alsdann der Winkel zOP das Maaß von LNm ist.

Eben so läßt sich [wie §. 192. und 193.] leicht einsehn, daß man von dem Bilde eines jeden andern wagerechten Winkels, das Maaß in Graden angeben kann, wenn man mit den Schenkeln dieses Winkels, durch Q Parallellinien bis an DE zieht, da dann die Anzahl Grade, welche zwischen diesen Parallellinien auf DE abgeschnitten werden, dem Maaße des perspektivischen Winkels entspricht.

§. 249.

Fig. 108. Auf der Tafel BCD, Figur 108., sei der Schenkel ac des Winkels bac, mit der Grundlinie BC parallel. Man ziehe Qb′ mit ab parallel, so ist b′Oz das Maaß des Winkels bac [§. 248.]. Ferner nehme man b′t = b′O, und setze den Winkel b′Oz = Ob′t = γ, so ist in dem gleichschenklichten Dreiecke b′Ot, der Winkel b′Ot = $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Wird nun bc mit Qt parallel gezogen, so ist b′Ot das Maaß des Winkels abc [§. 248.], also ist $90° - \frac{1}{2}\gamma$ daß Maaß von abc. Das Maaß des Winkels acb ist daher $180° - \gamma - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, folglich sind die Winkel abc und acb einander gleich, das perspektivische Dreieck abc ist gleichschenklicht, und die Seiten ab und ac haben einerlei Maaß. Nun ist das Maaß der Linie ac ihr selbst gleich [§. 247.], folglich ac das Maaß von ab.

Theilt man ab in zwei gleich große Theile, so läßt sich eben so beweisen, daß die Hälfte von ac das Maaß der Hälfte von ab ist, und weil dies für

jeden andern Theil der Linie ab eben so gilt, so folgt hieraus, daß alle gleich große Theile der Linie ab einerlei Maaß haben. Taf. XVI.

§. 250.

Beweis zu §. 179.

Weil AP = AQ, Figur 111., so ist P der Theilungspunkt für die Linie bc. Zieht man nun ac mit PQ parallel, so wird ab das Maaß von bc; [§. 249.] es ist aber ab mit AP, ac mit QP, und bc mit QA parallel, daher sind die Dreiecke abc und APQ einander ähnlich, folglich ist, weil AP = AQ, auch ab = bc, also bc seinem Maaße gleich. Fig. 111.

Ende des zweiten und letzten Theils.

Achtzehn

Kupfertafeln

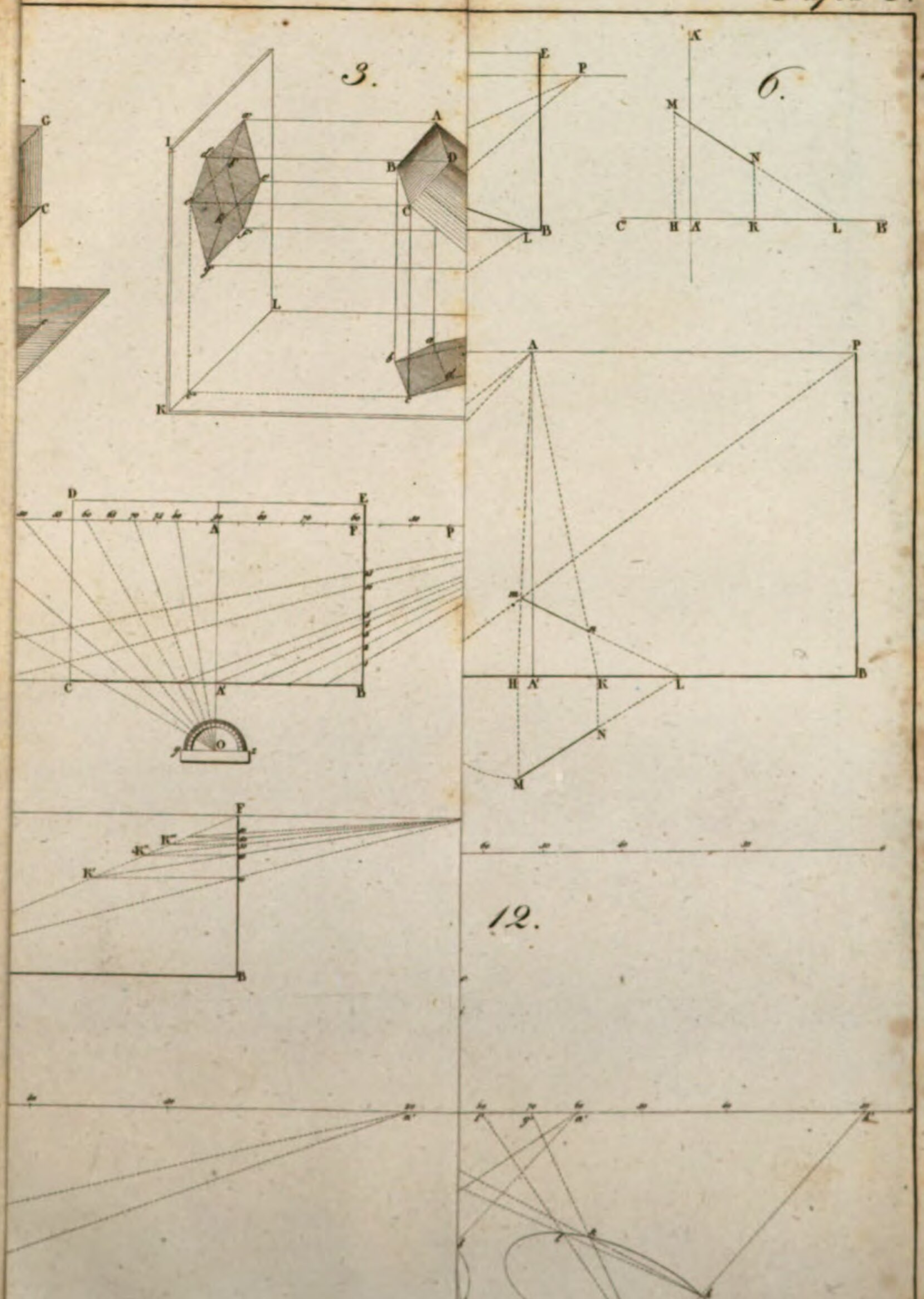
zu

Eytelweins Handbuch

der

Perspektive.

Tafel I.

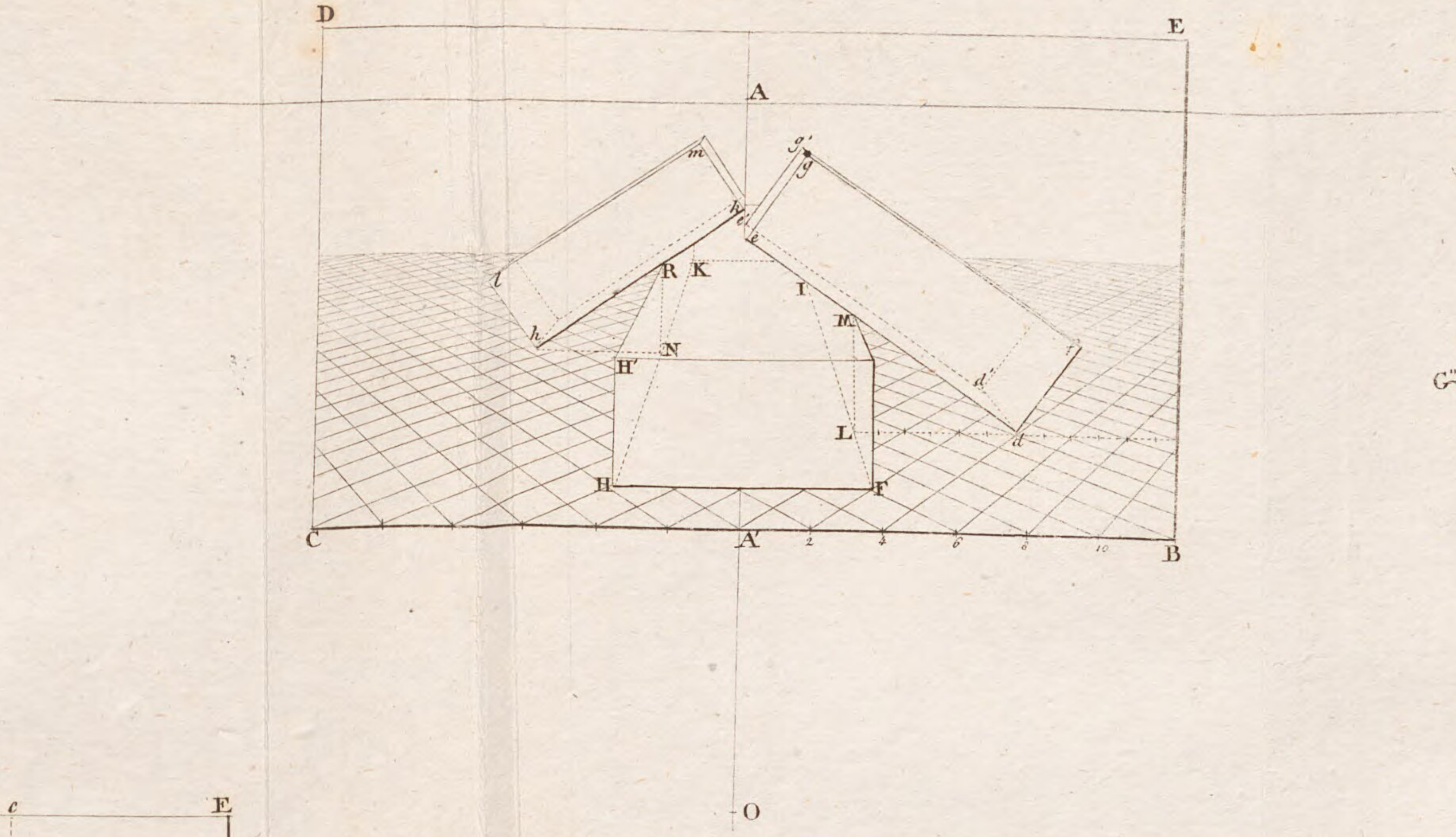


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.

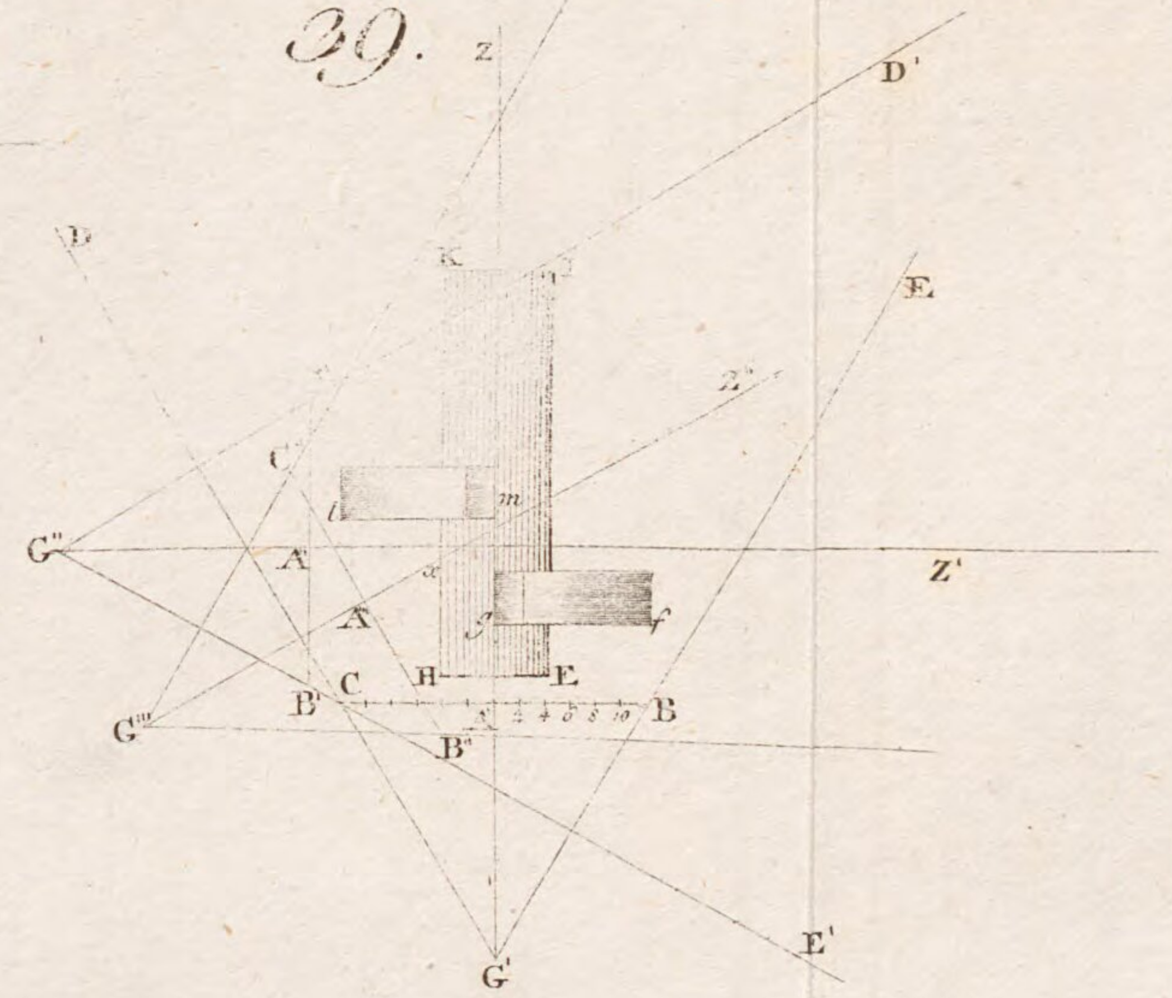
T. Duchstein sc. 1809.

Tafel III.

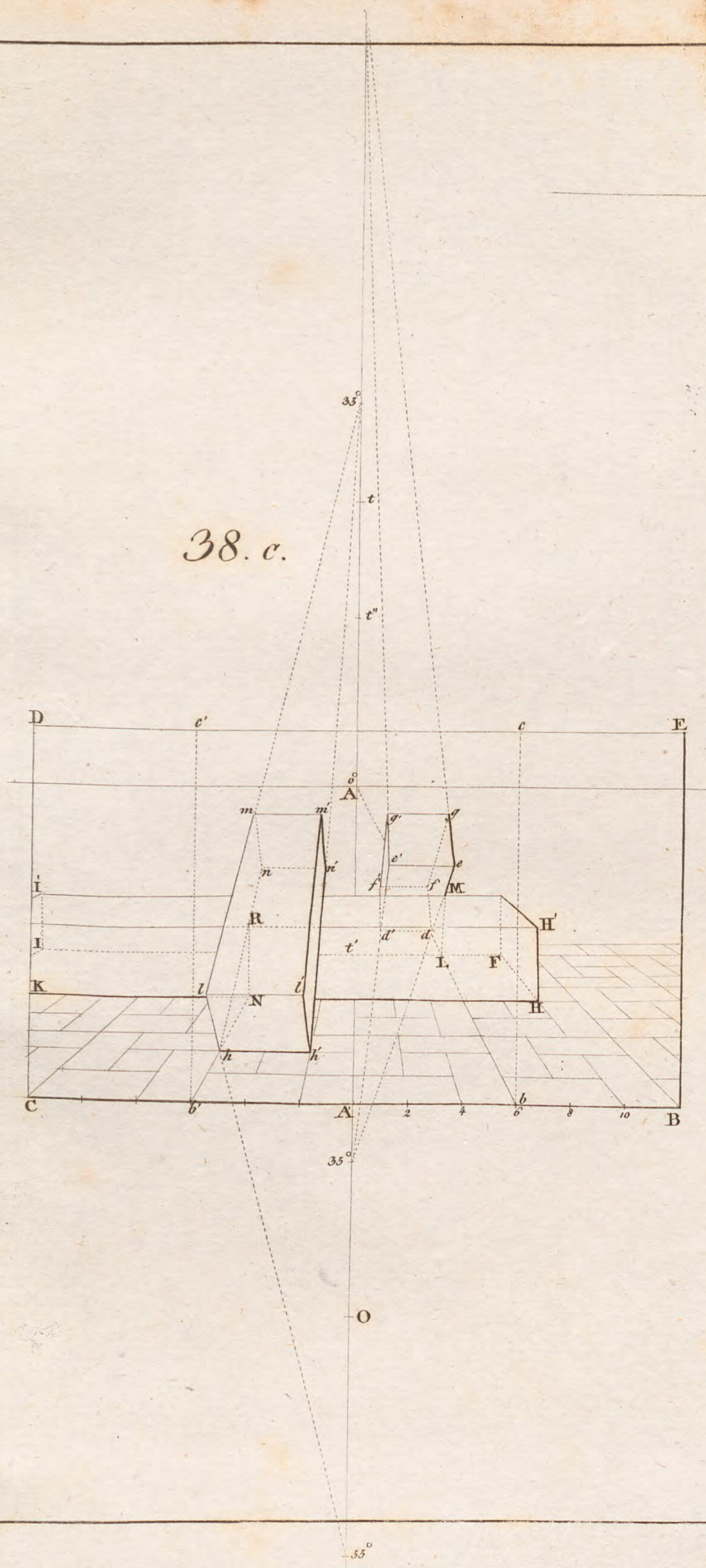
38. a.



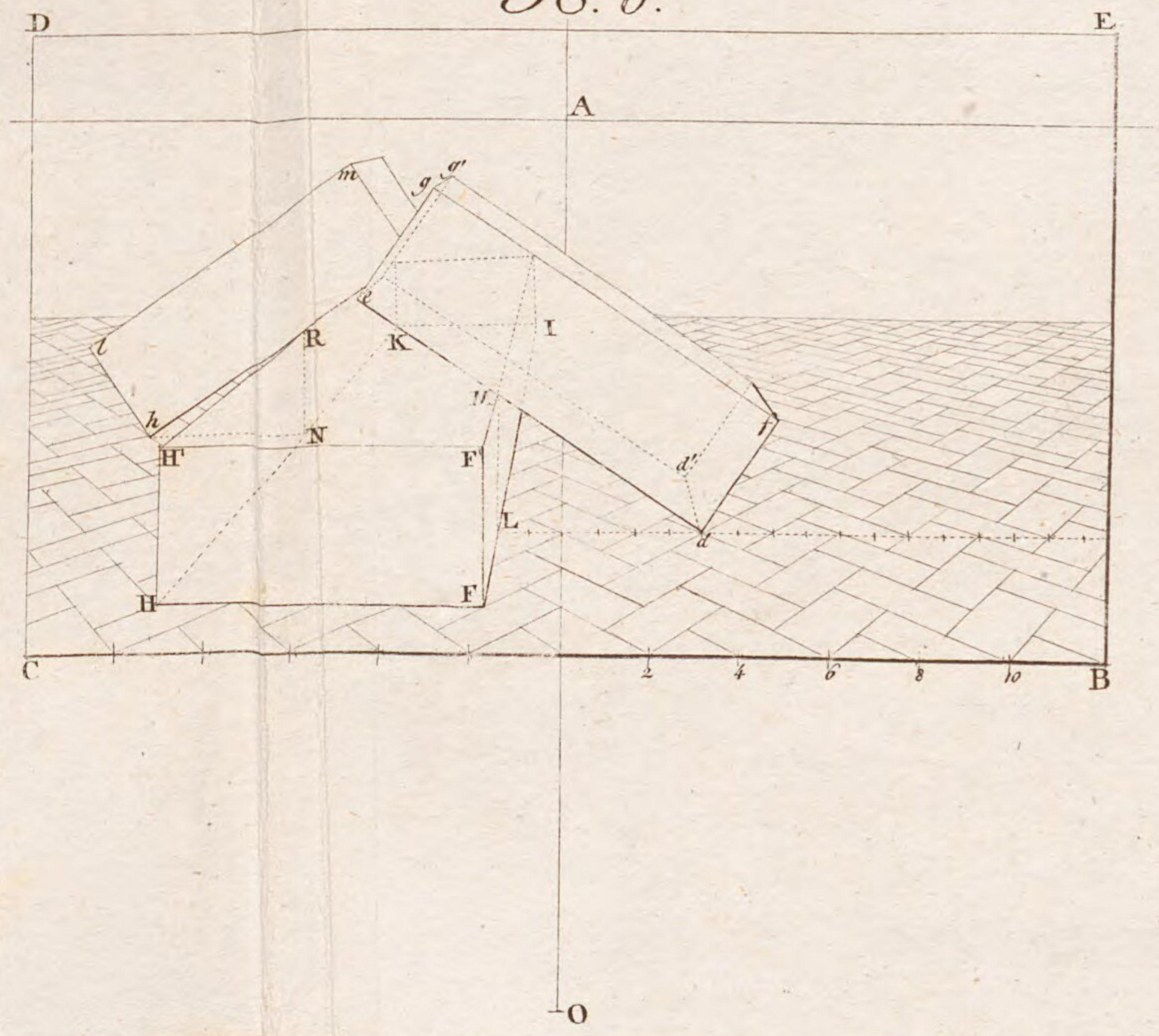
39.



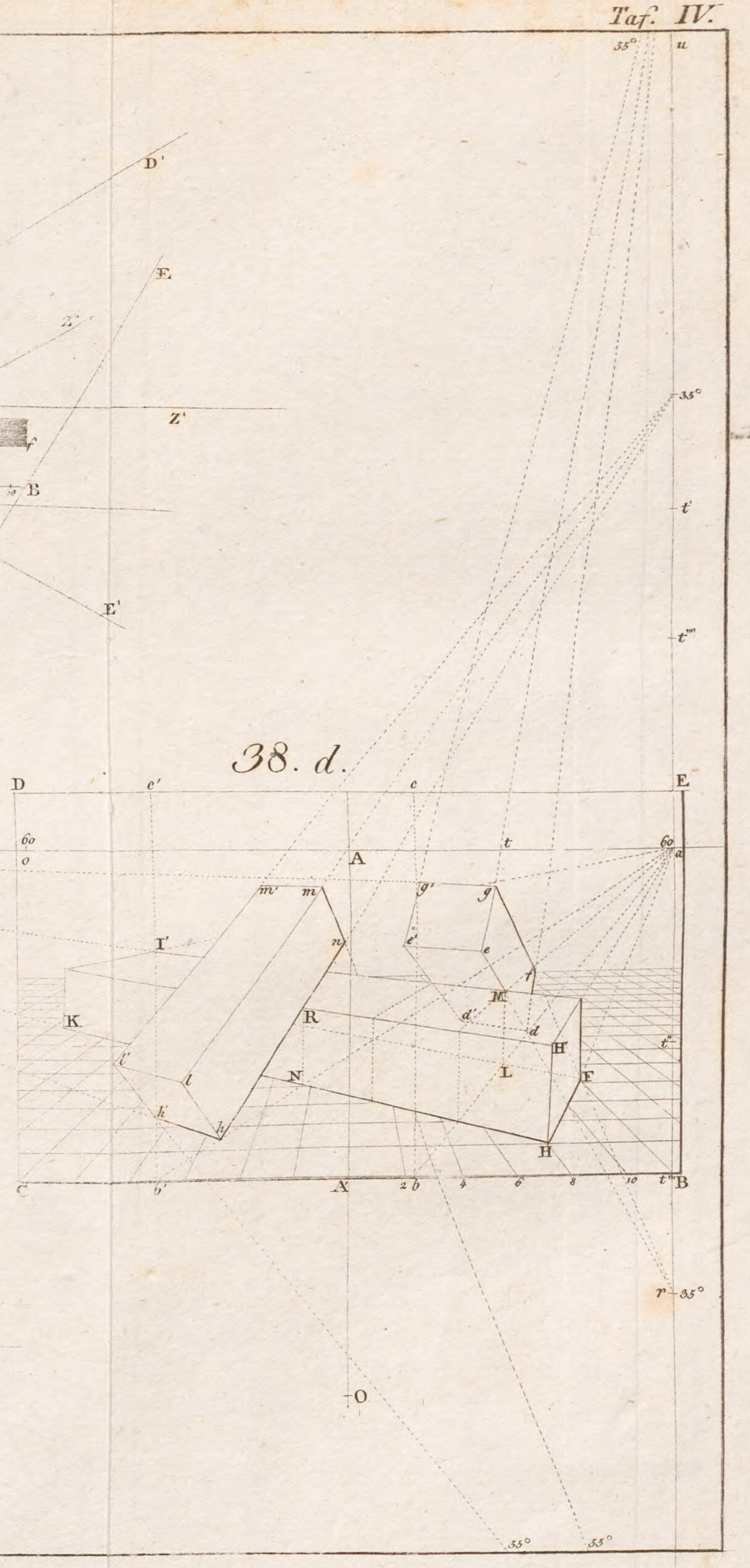
38. c.



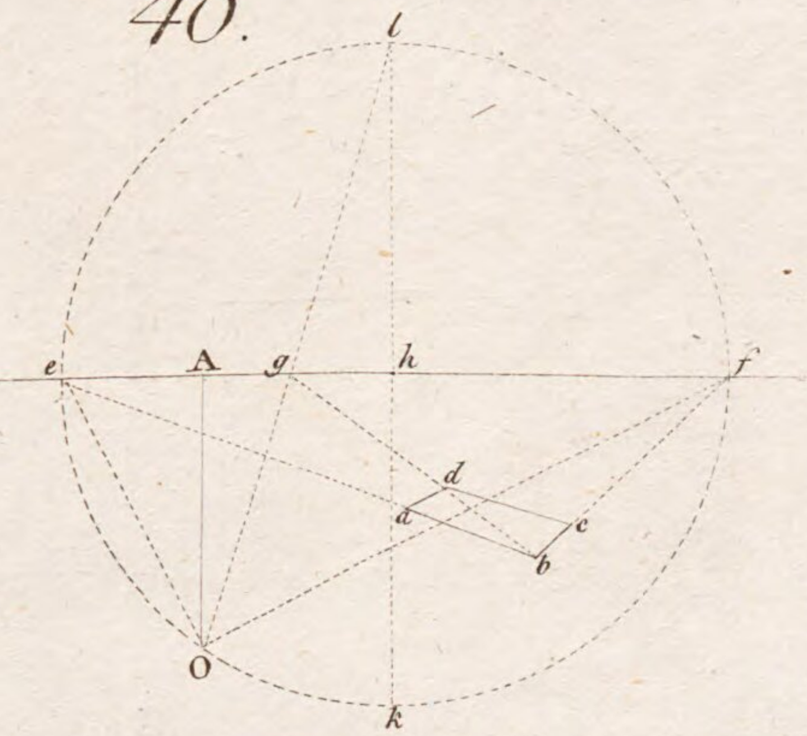
38. b.



38. d.

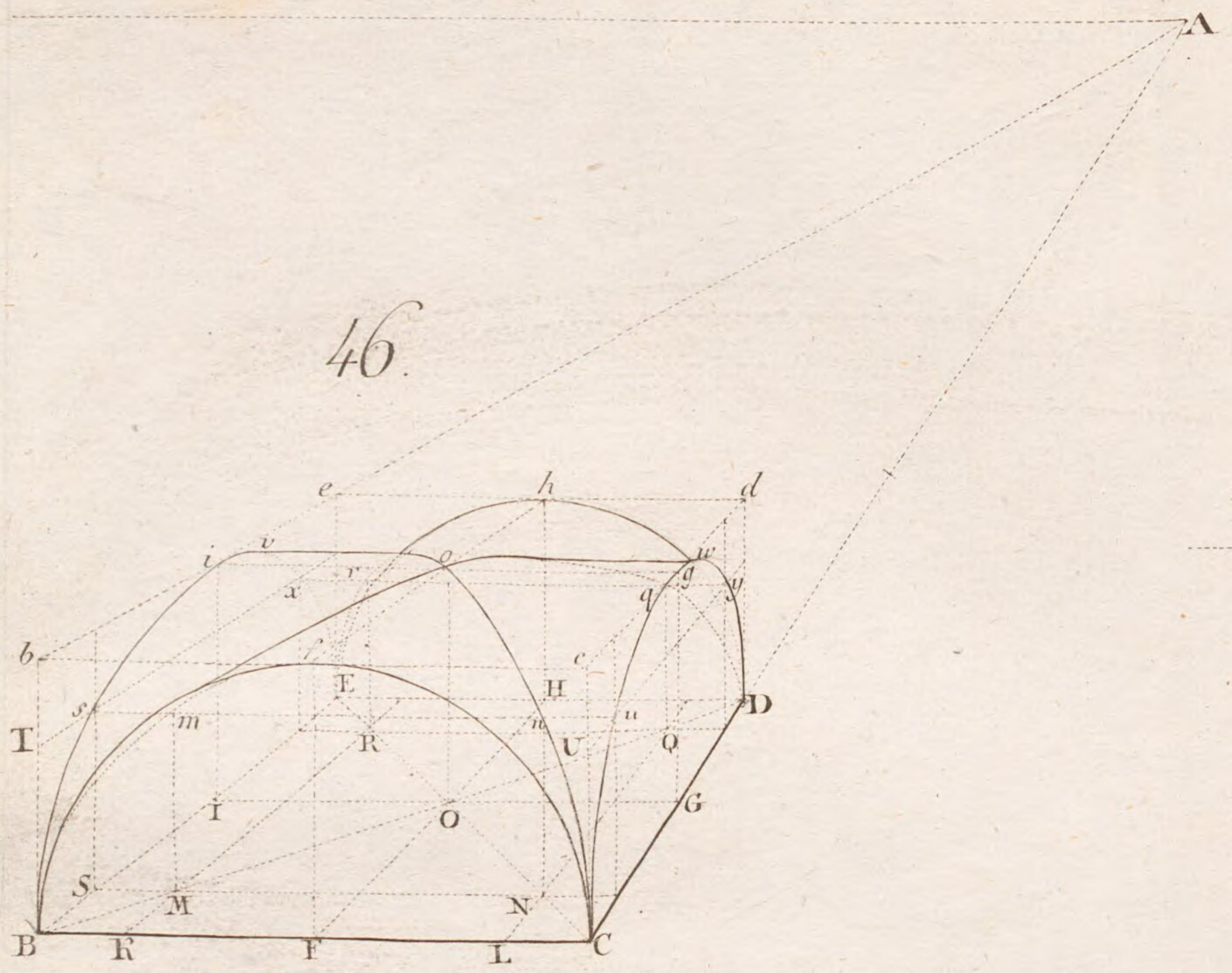


40.

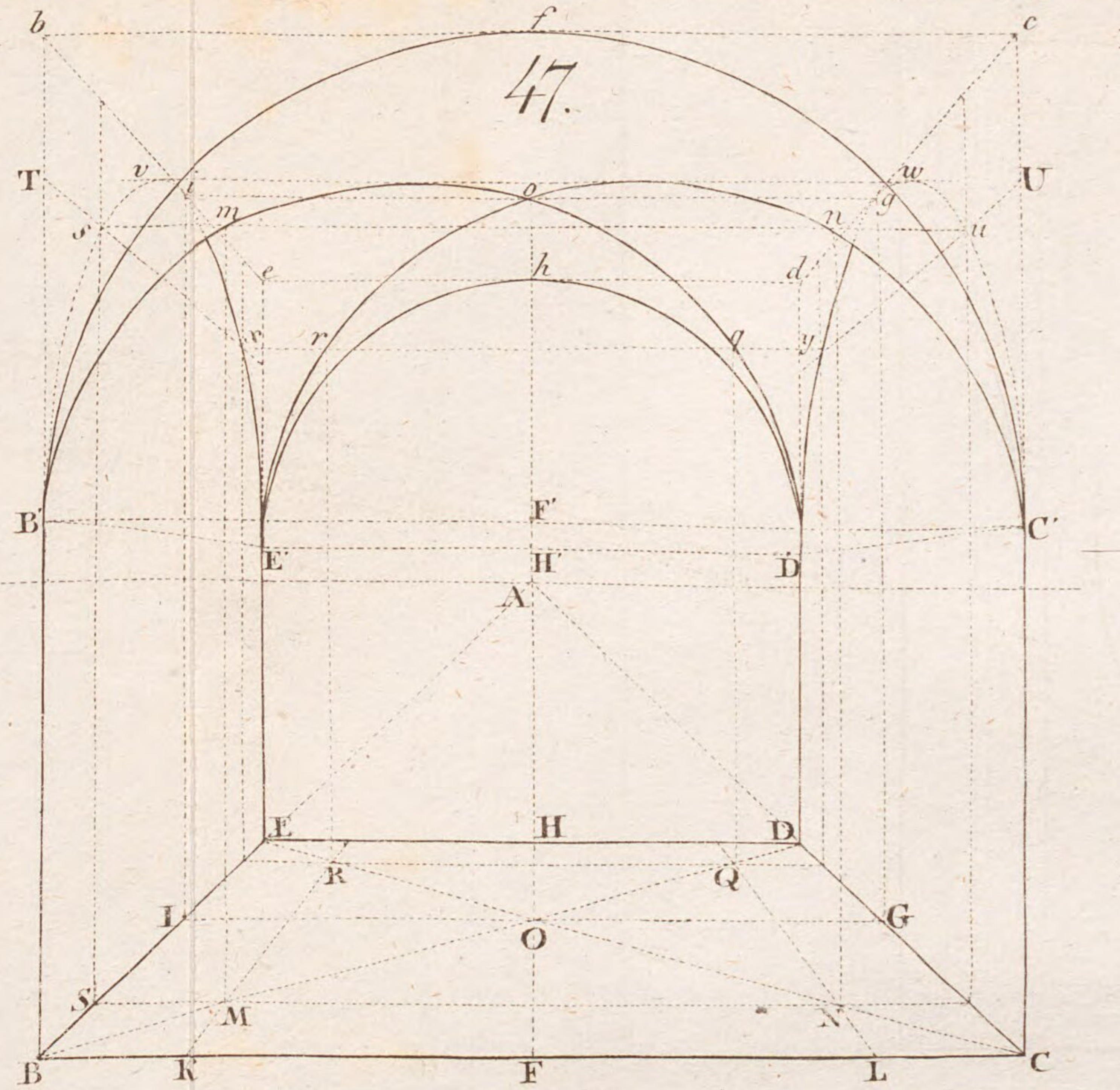


41.
42.
43.
Carl Jättnig sc.

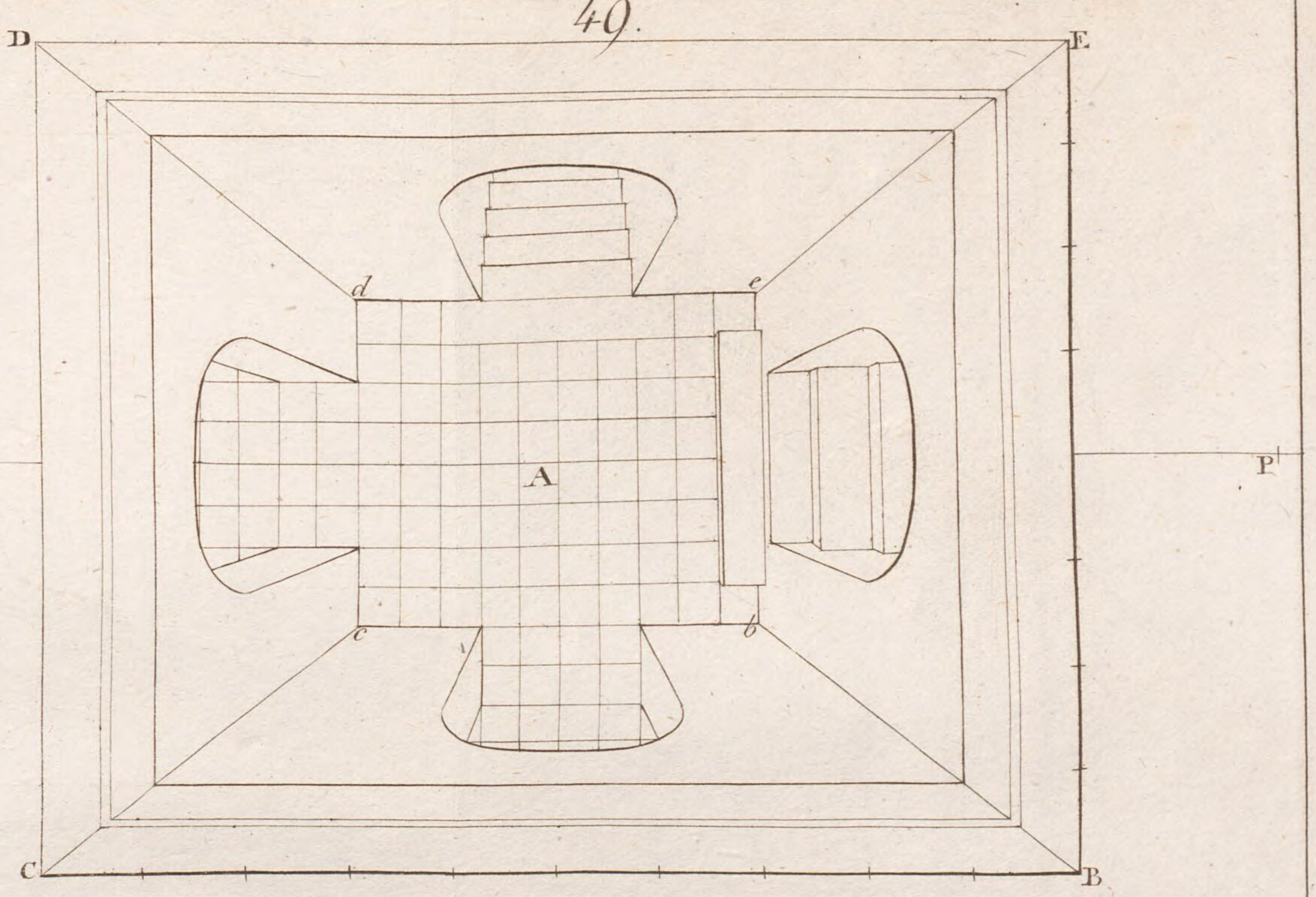
44.
45.
D
E
N
M
L
K
H
F
A
Q
P
t
t'



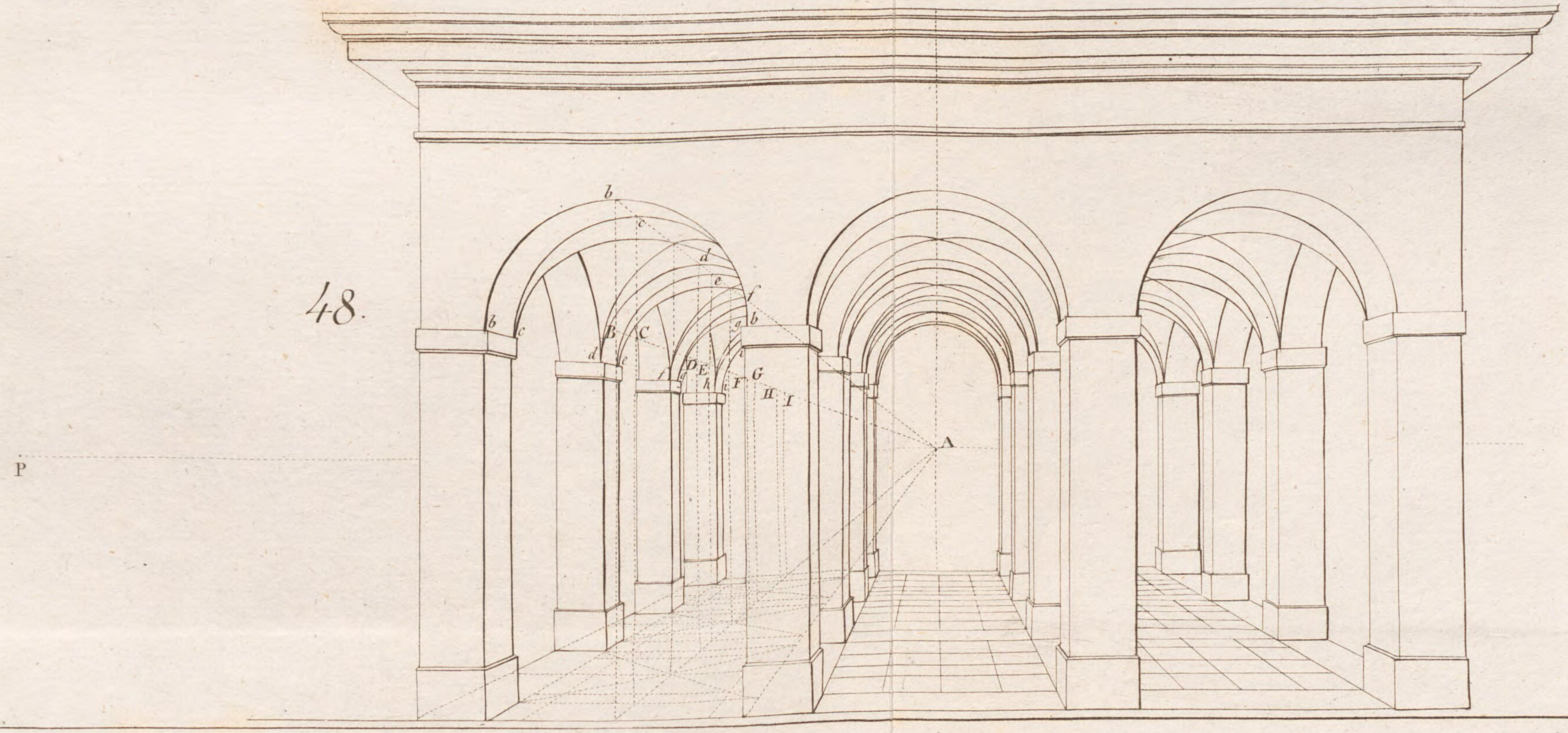
46.



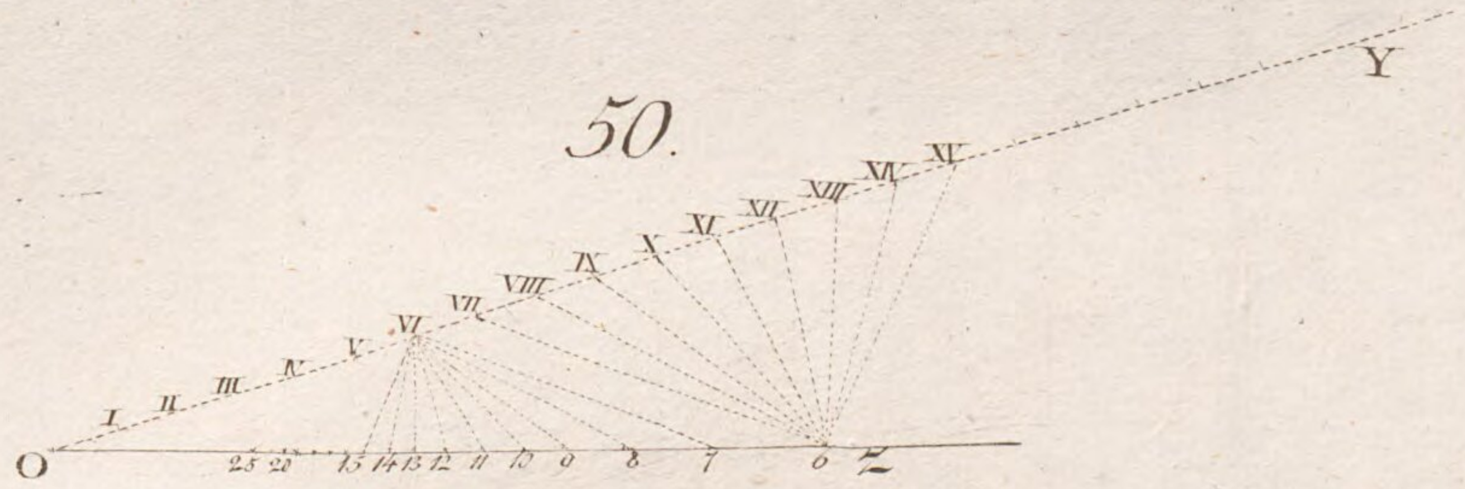
47.



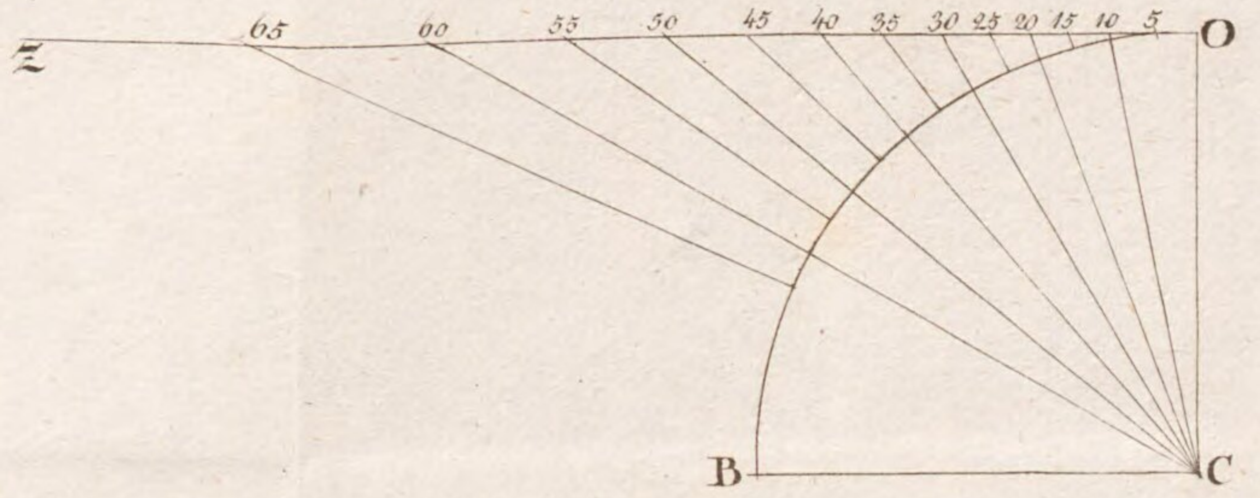
49.



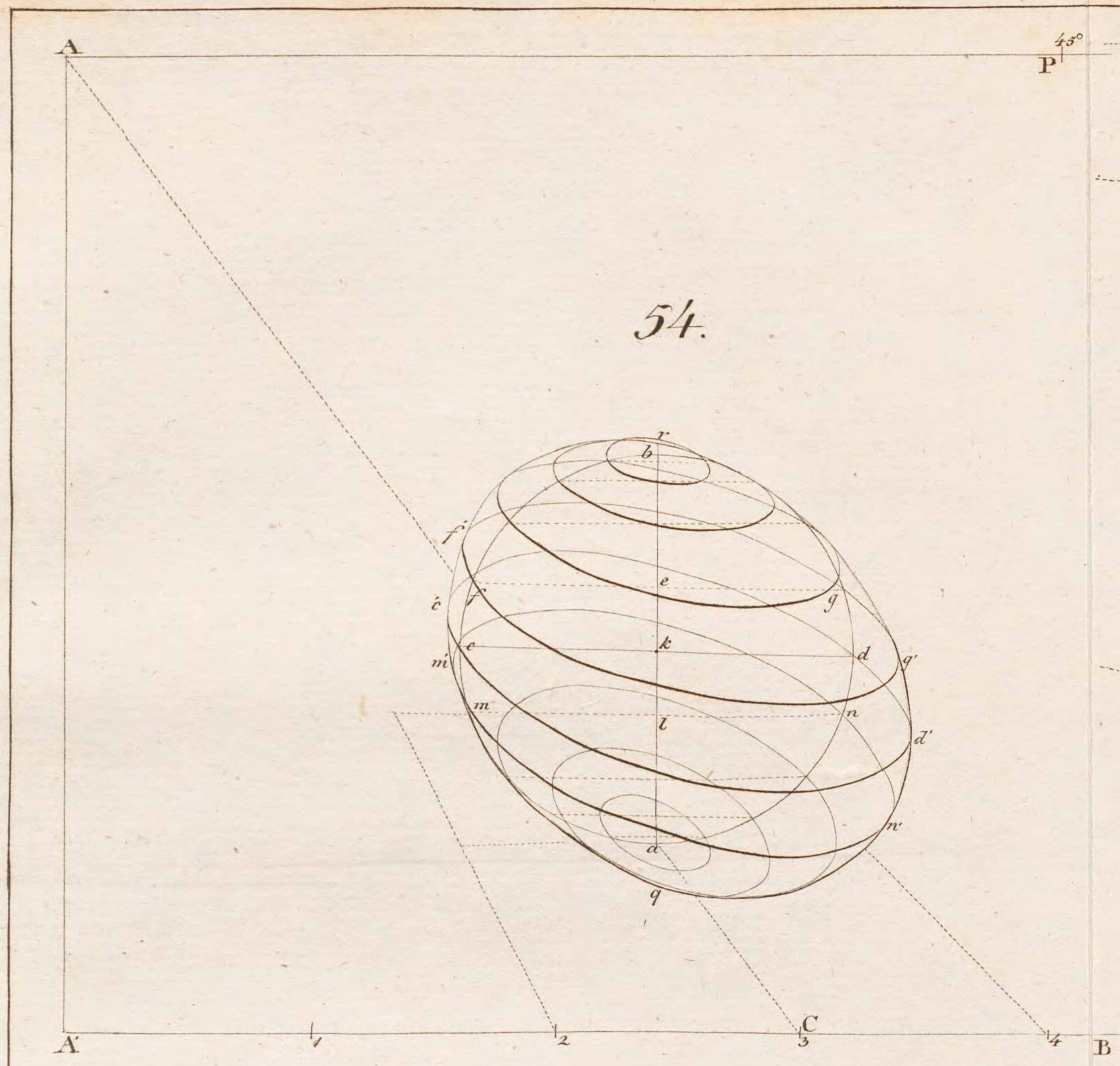
48.



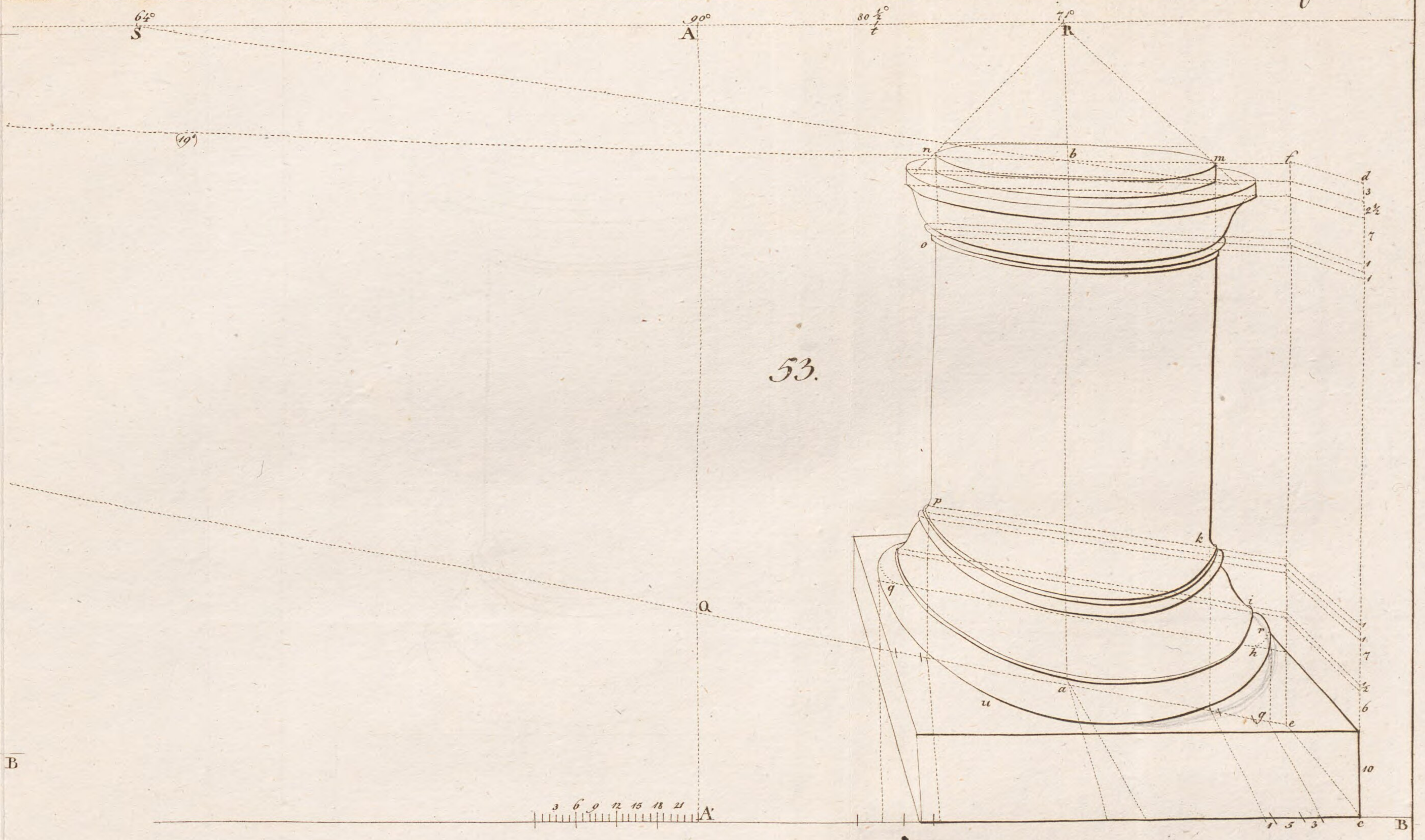
50.



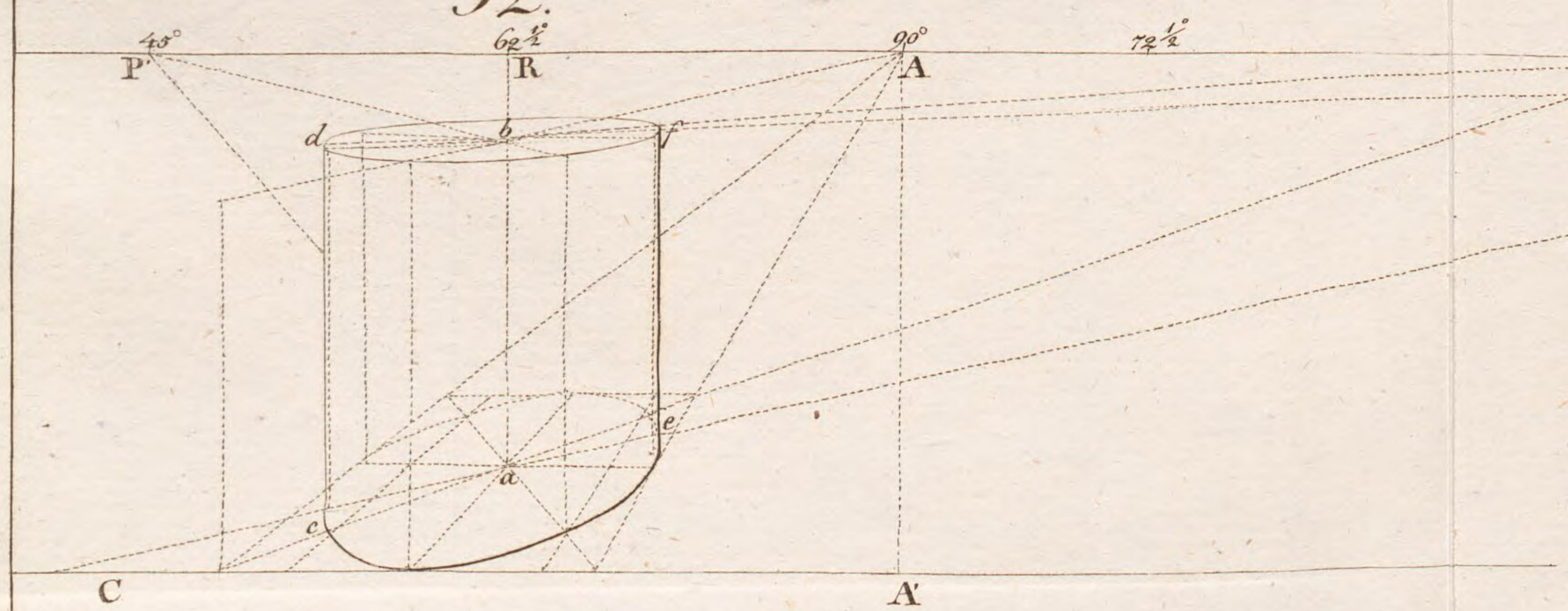
51.



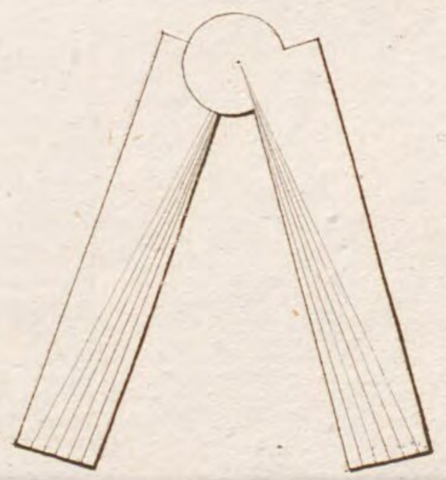
54.



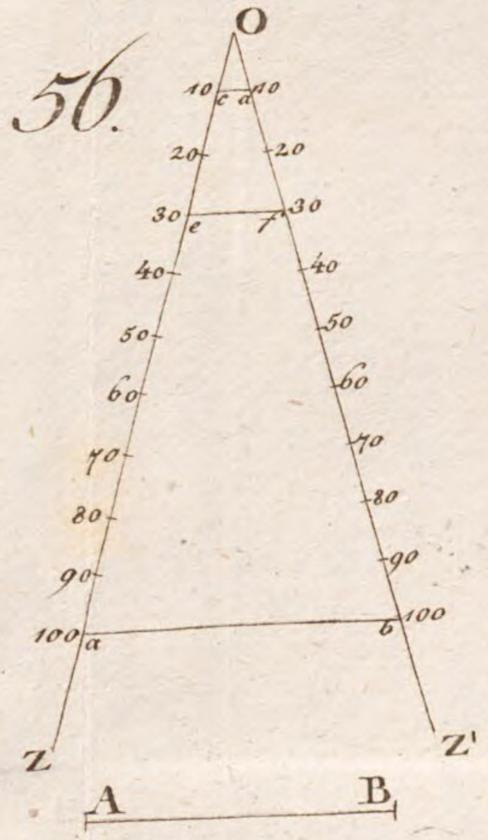
53.



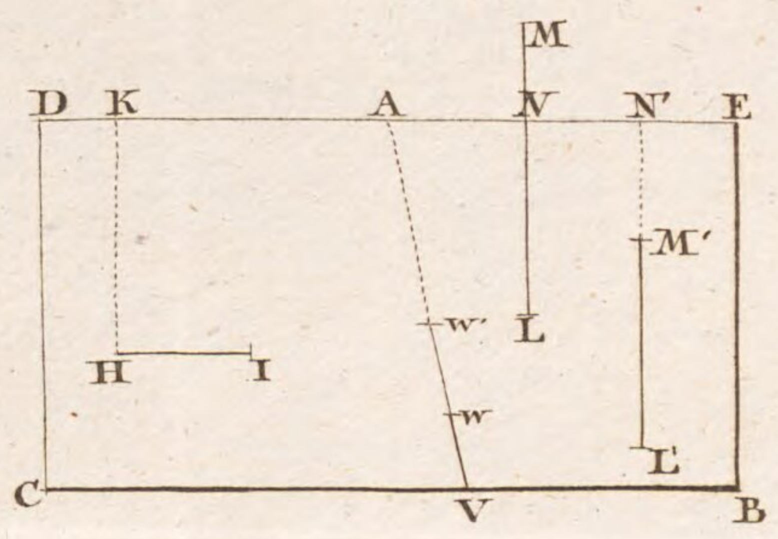
52.



55.



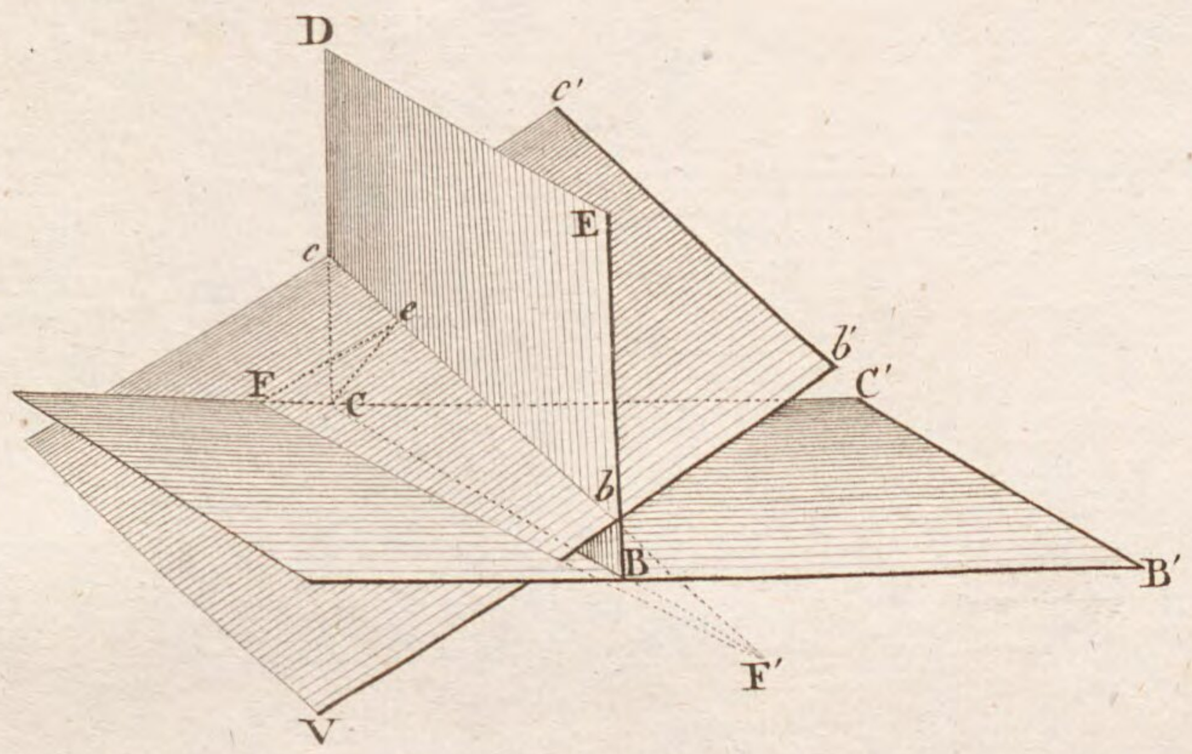
56.



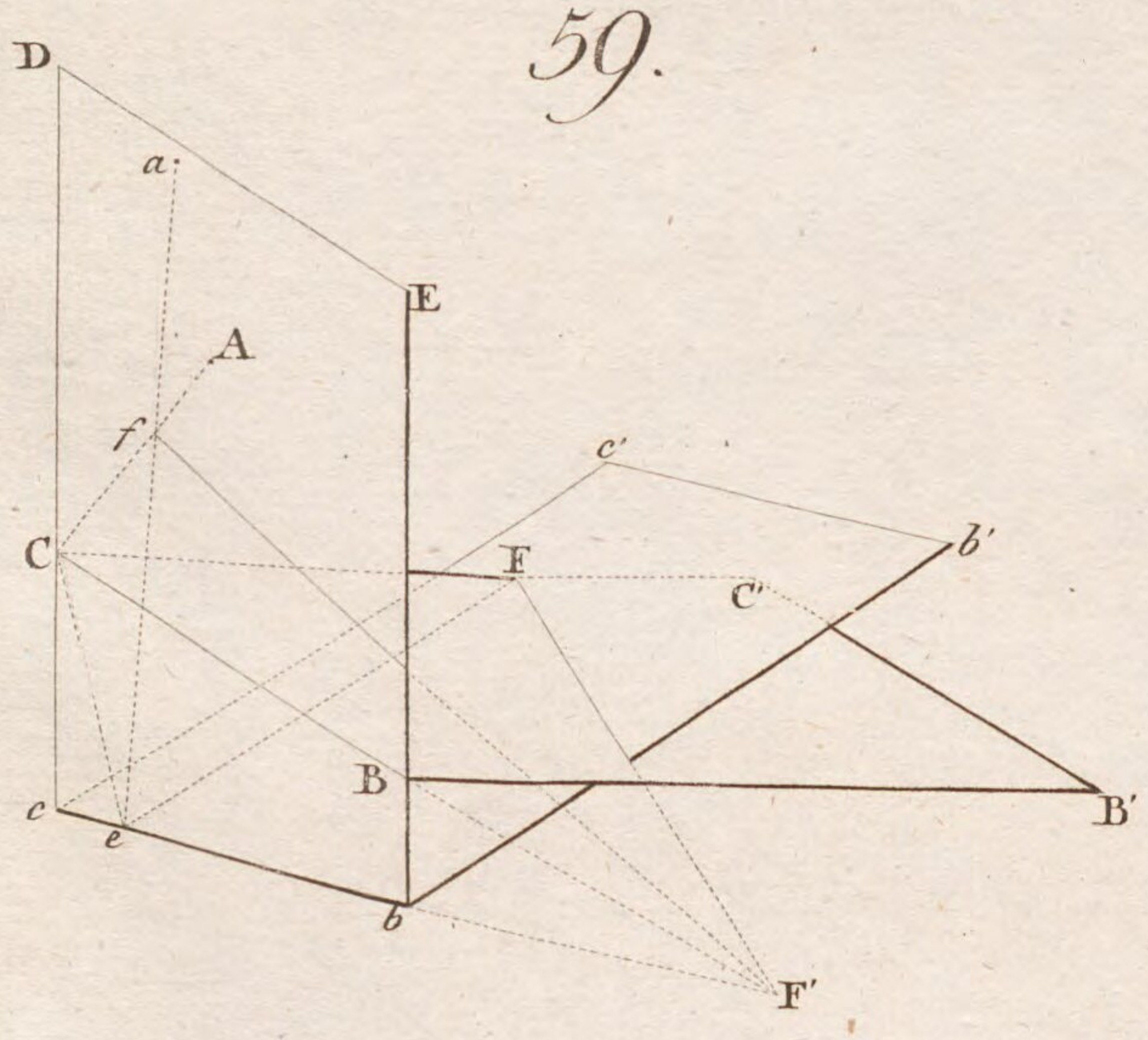
57.

geätzt v. Frick

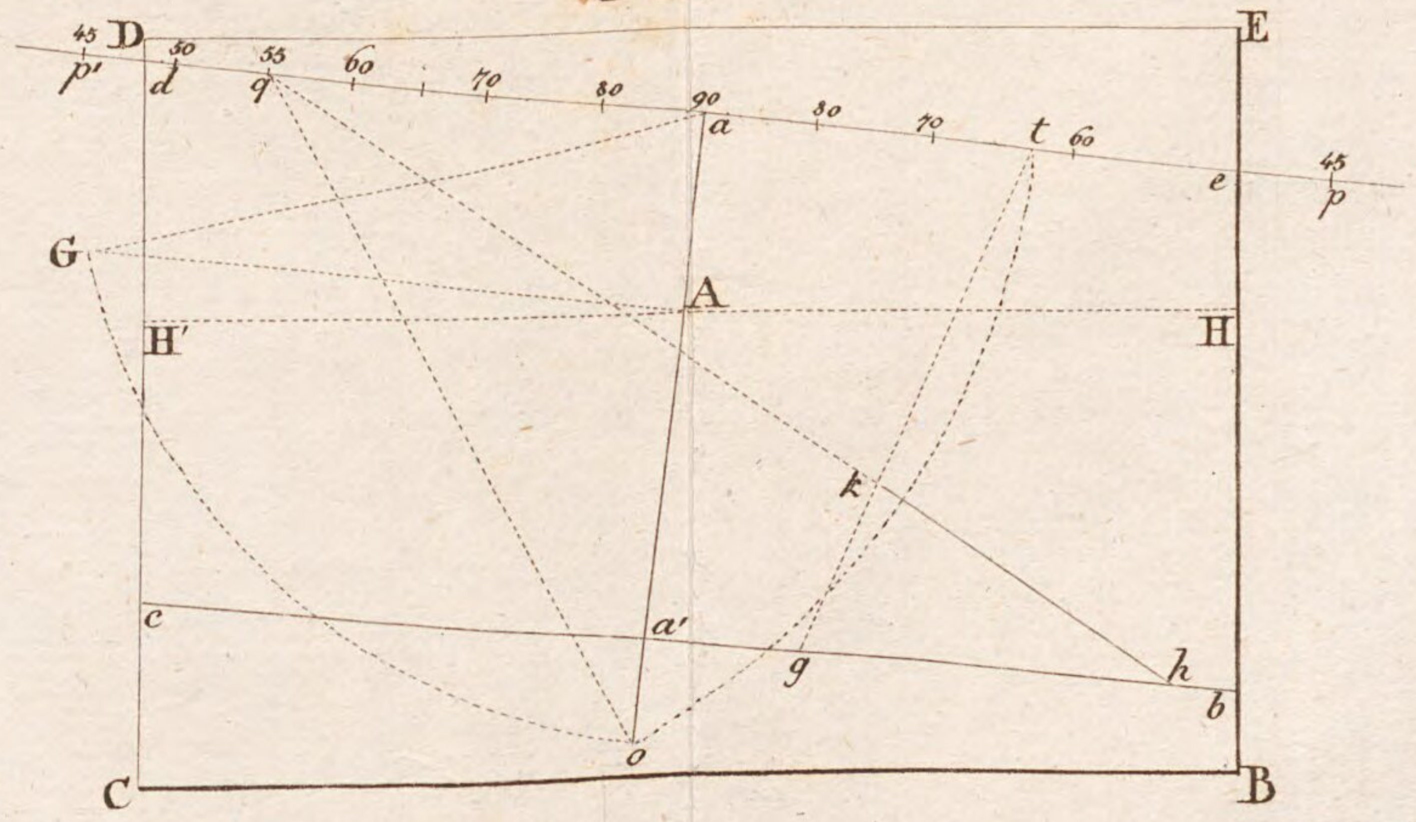
58.



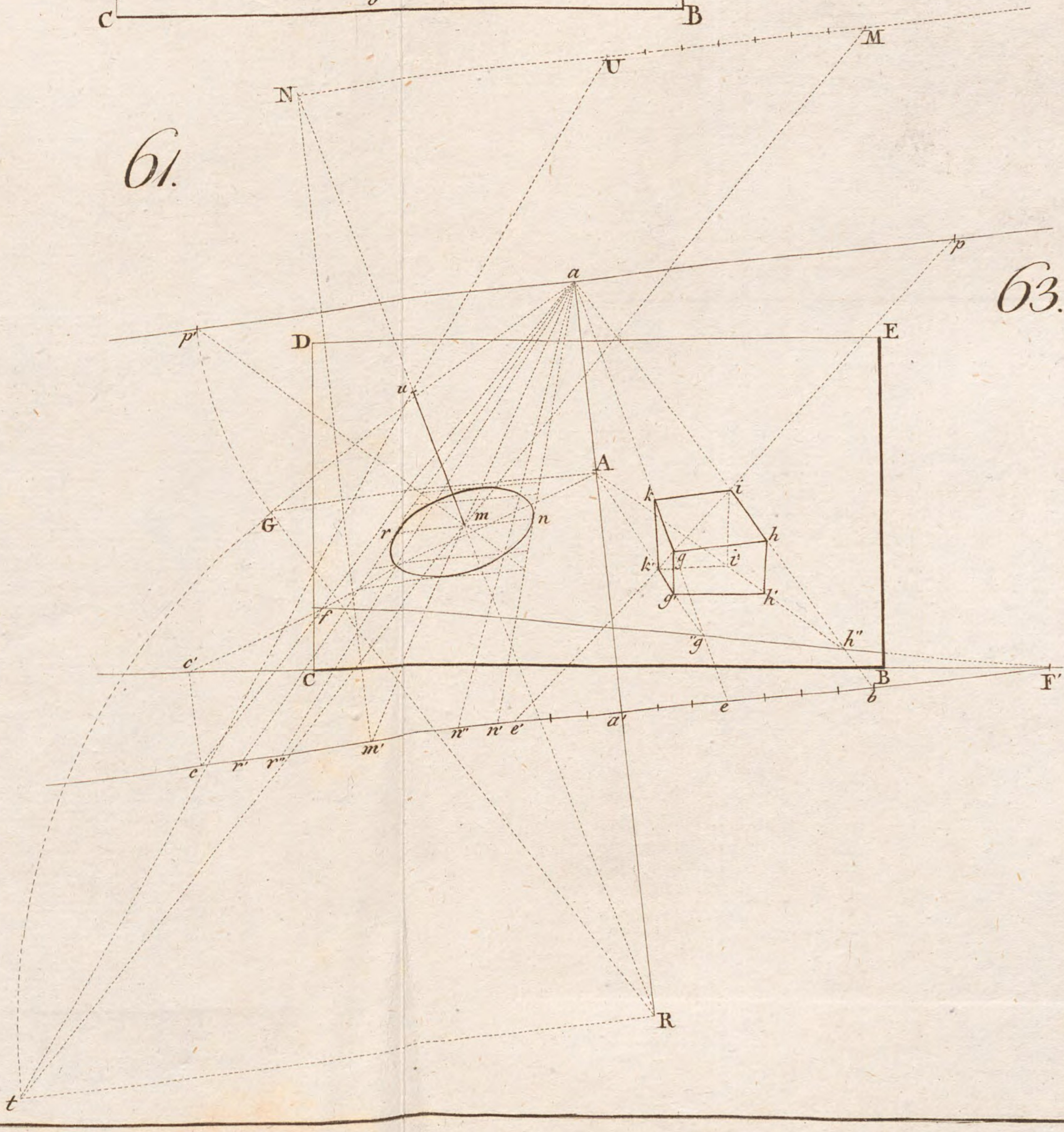
59.



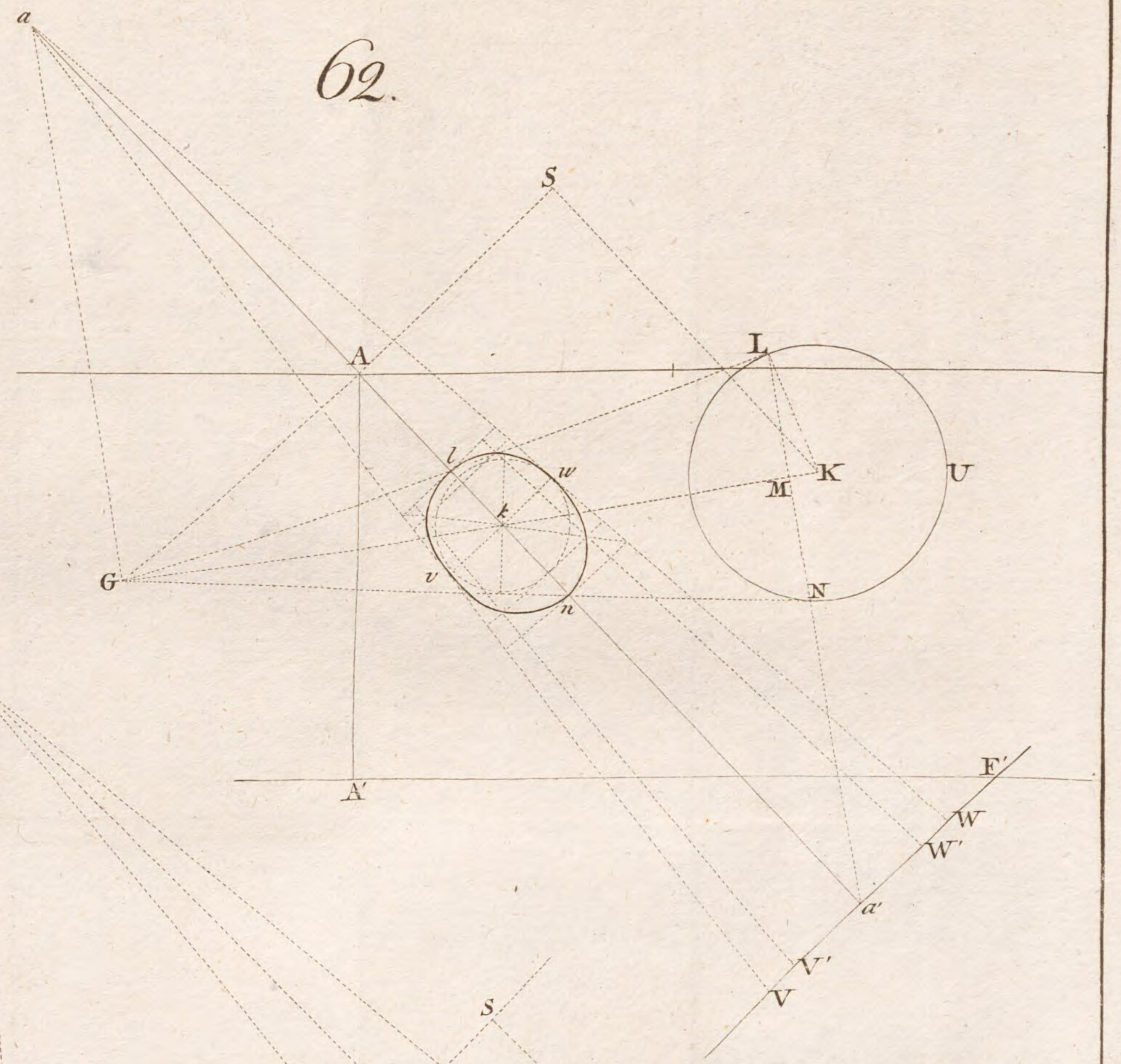
60.



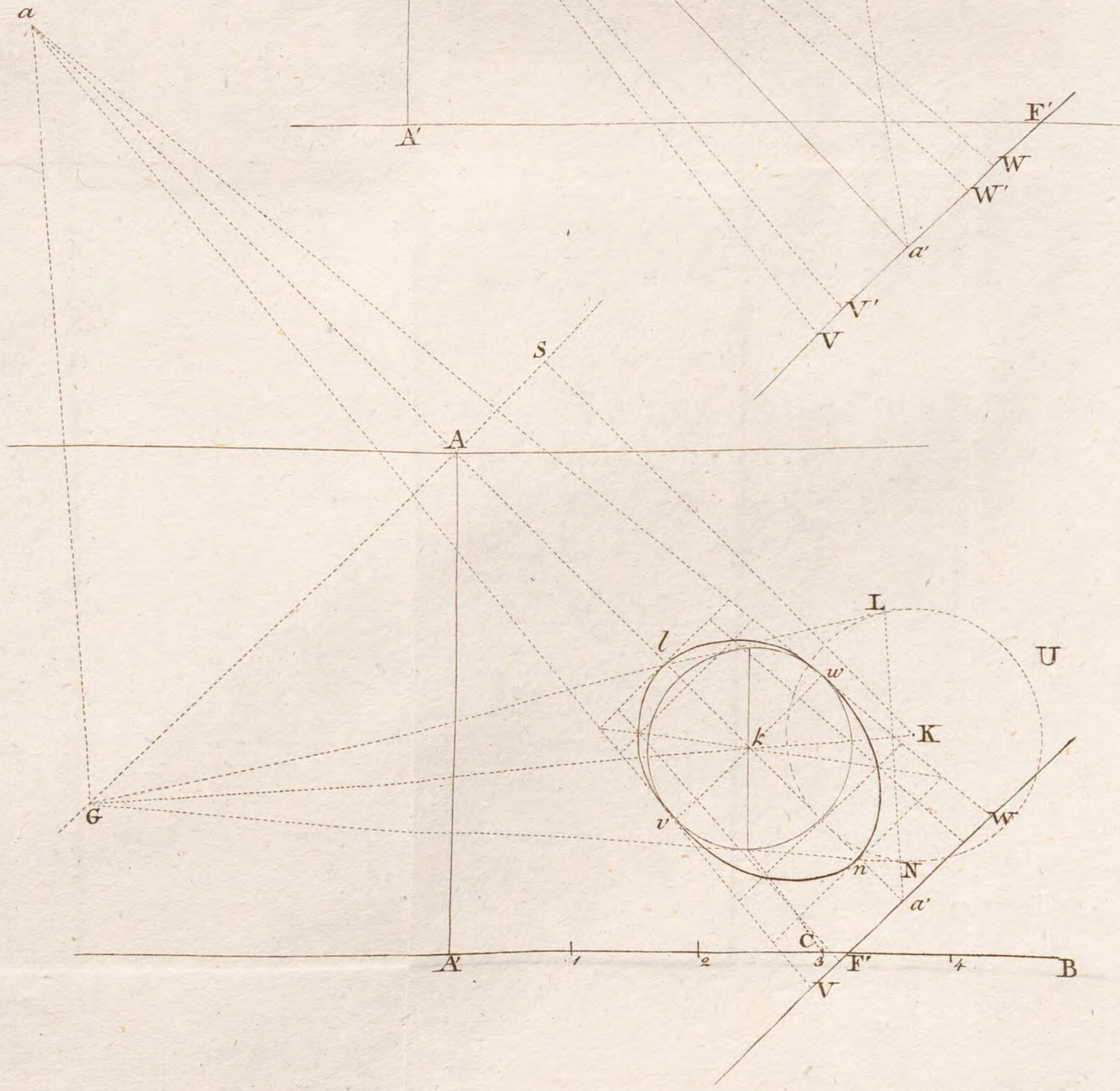
61.



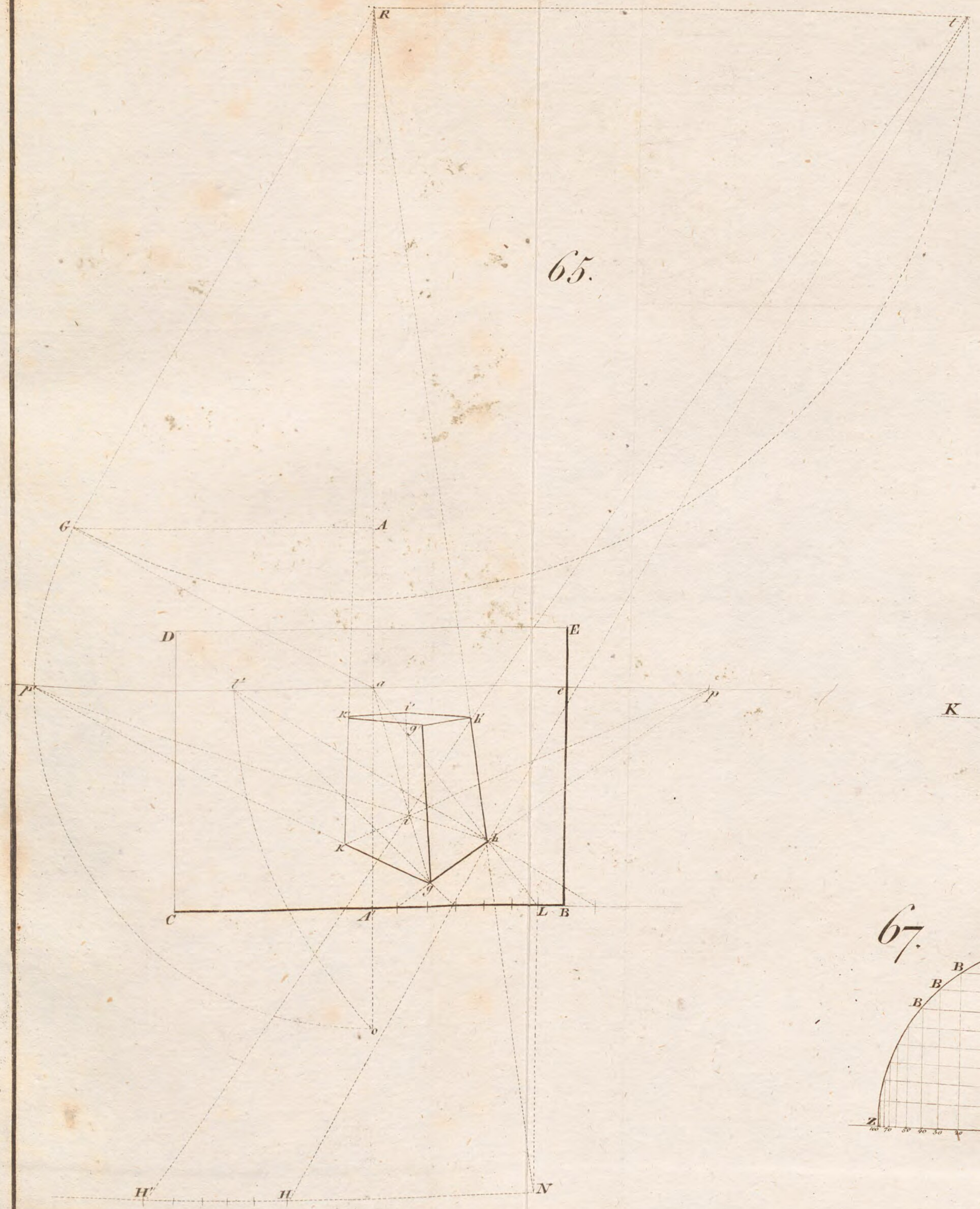
62.



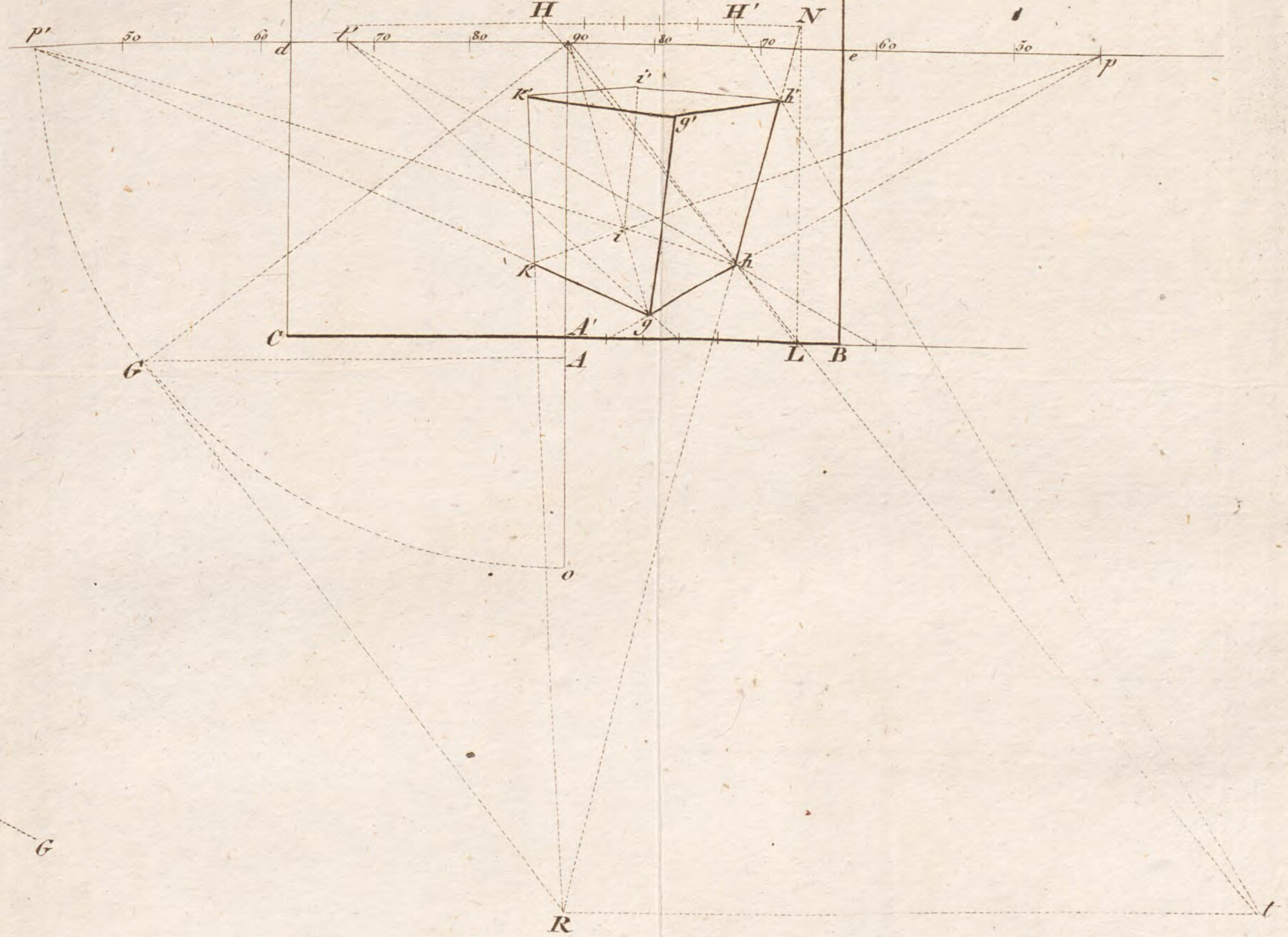
63.



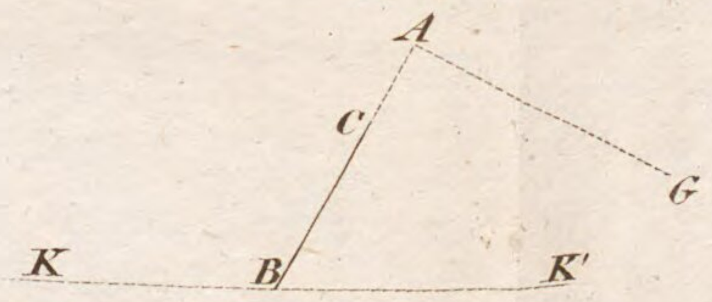
65.



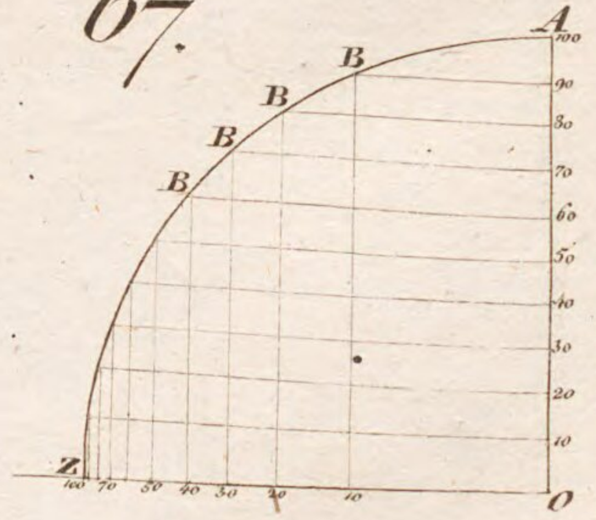
66



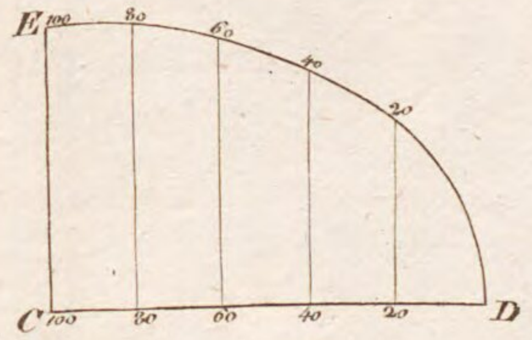
64



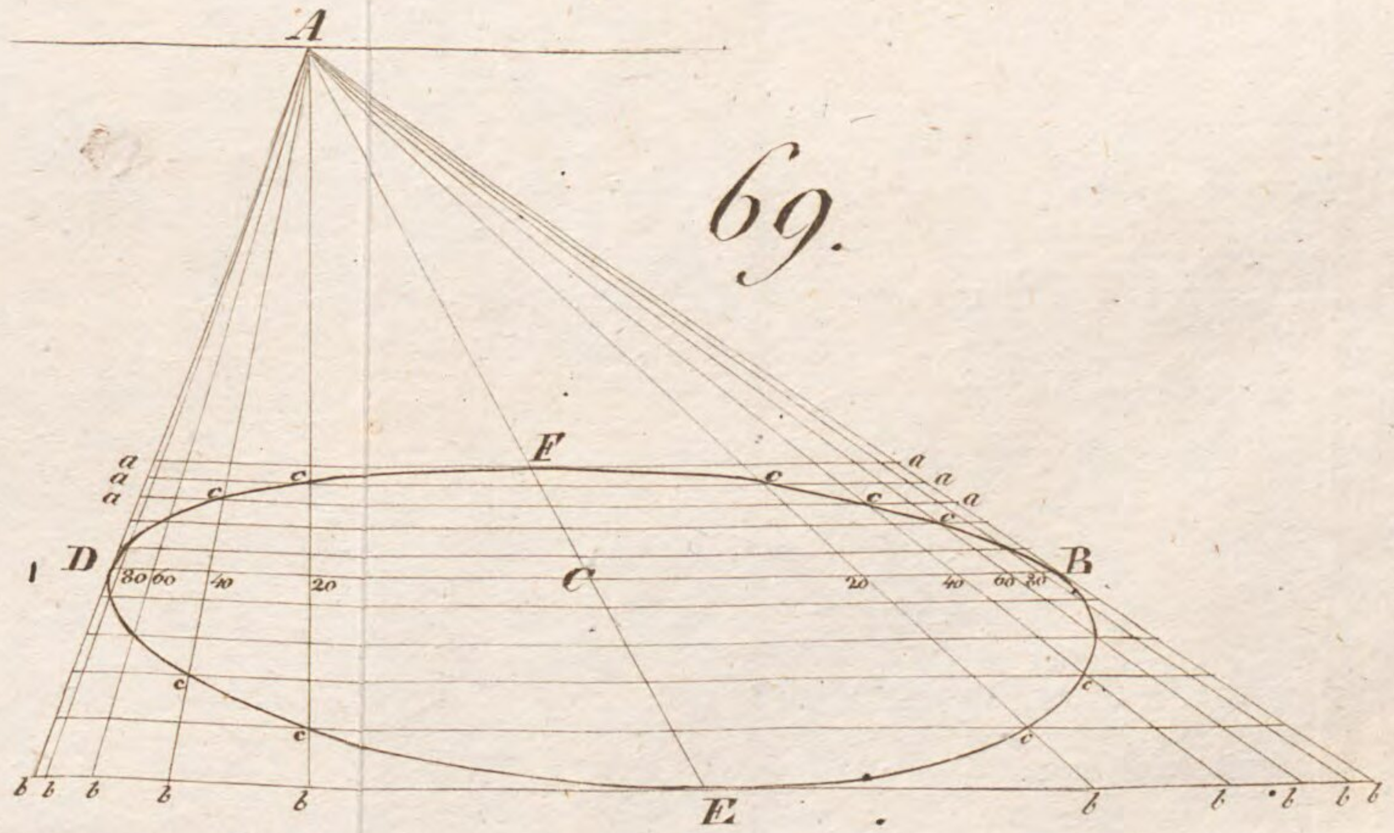
67.



68.

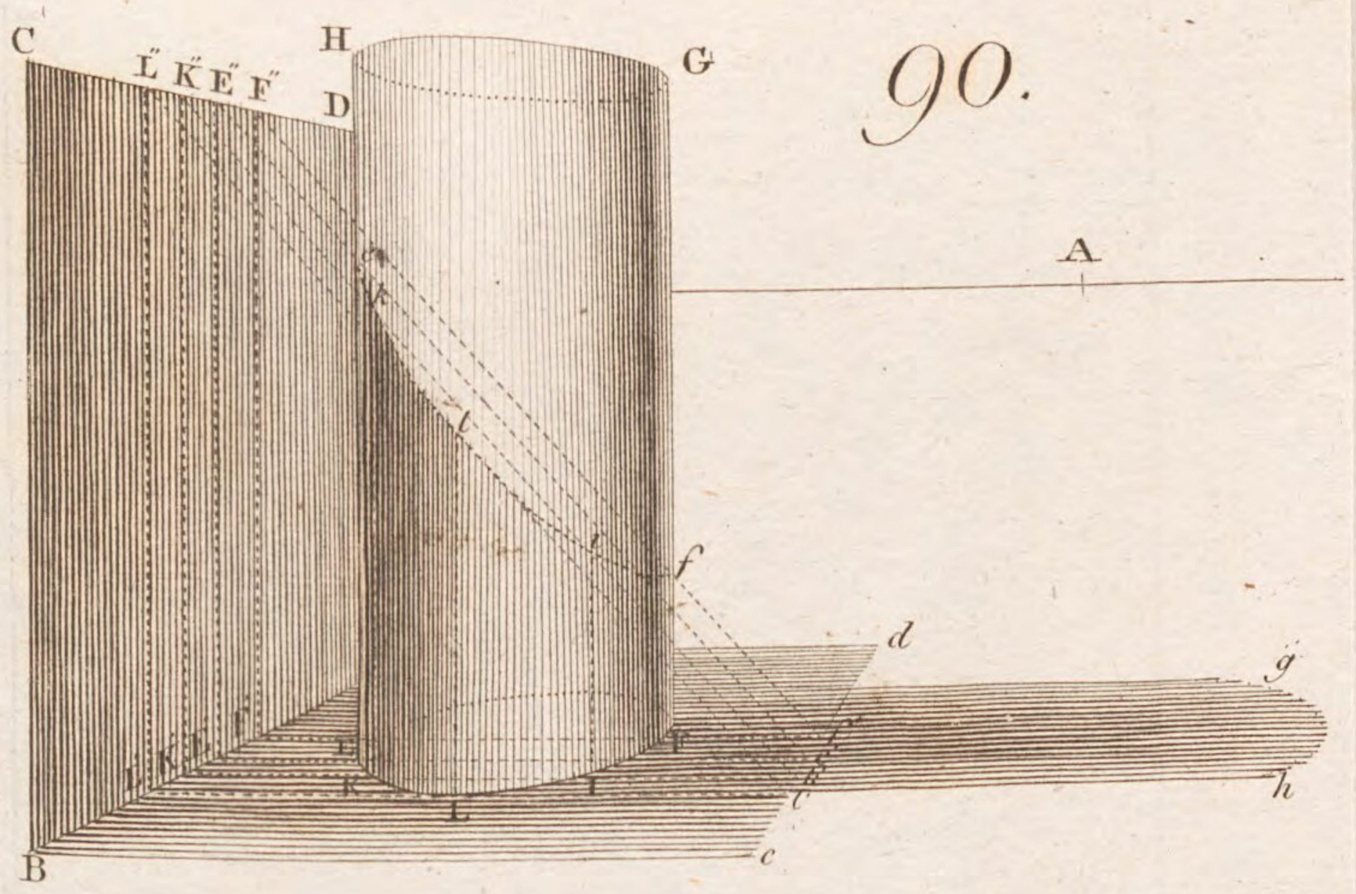


69.

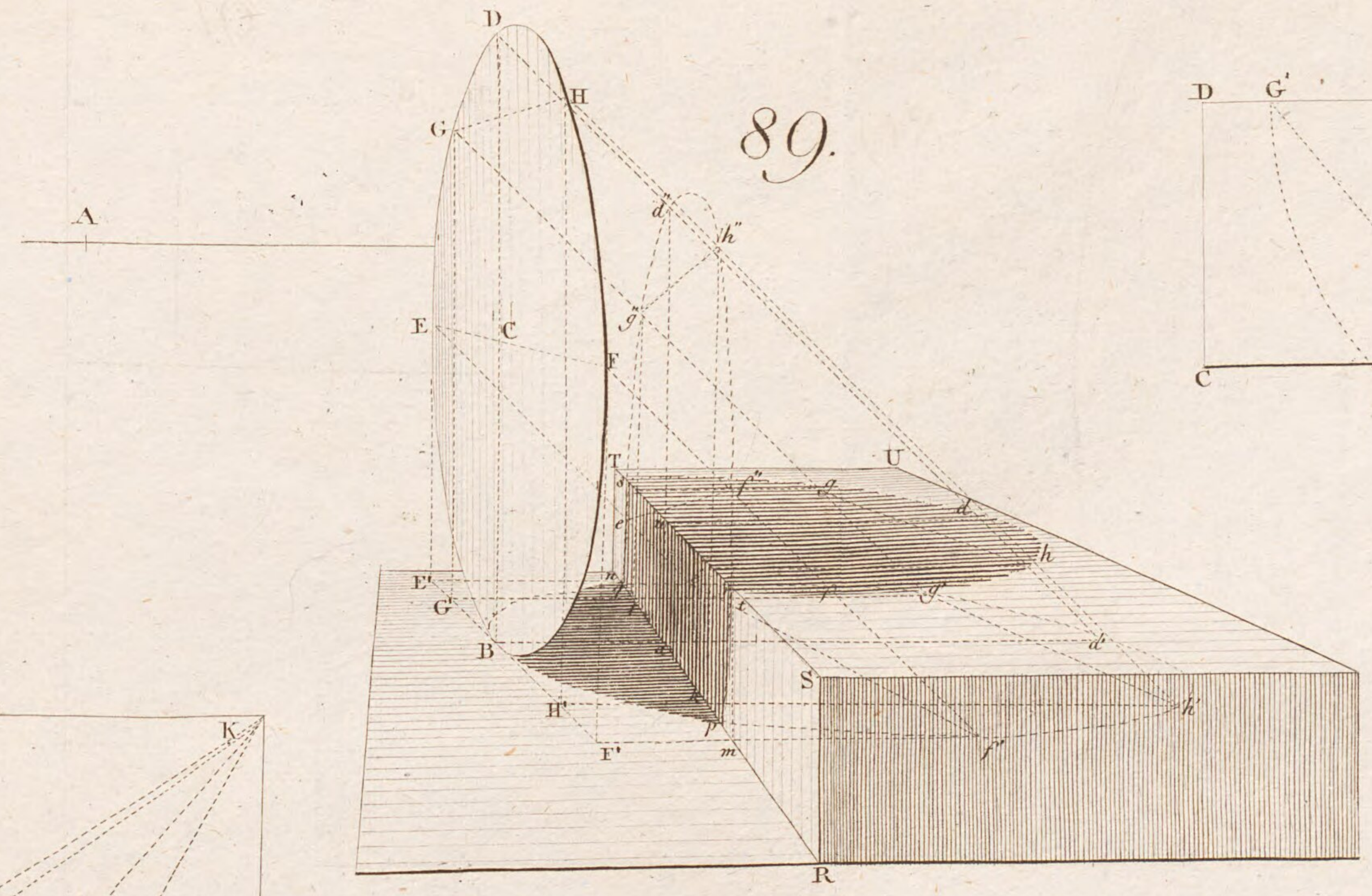


70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.

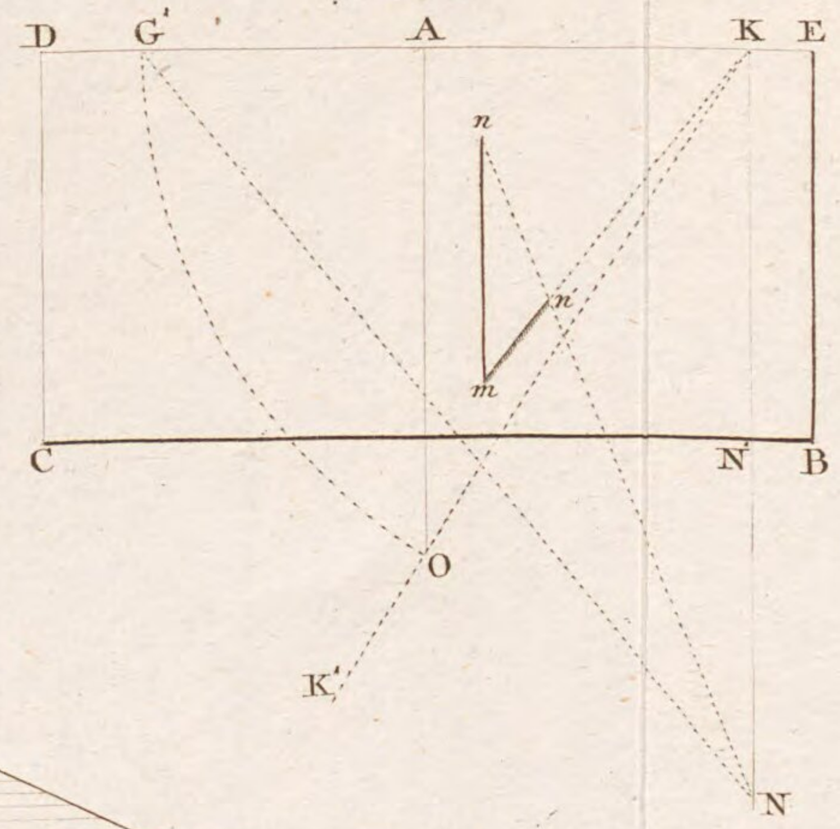
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.



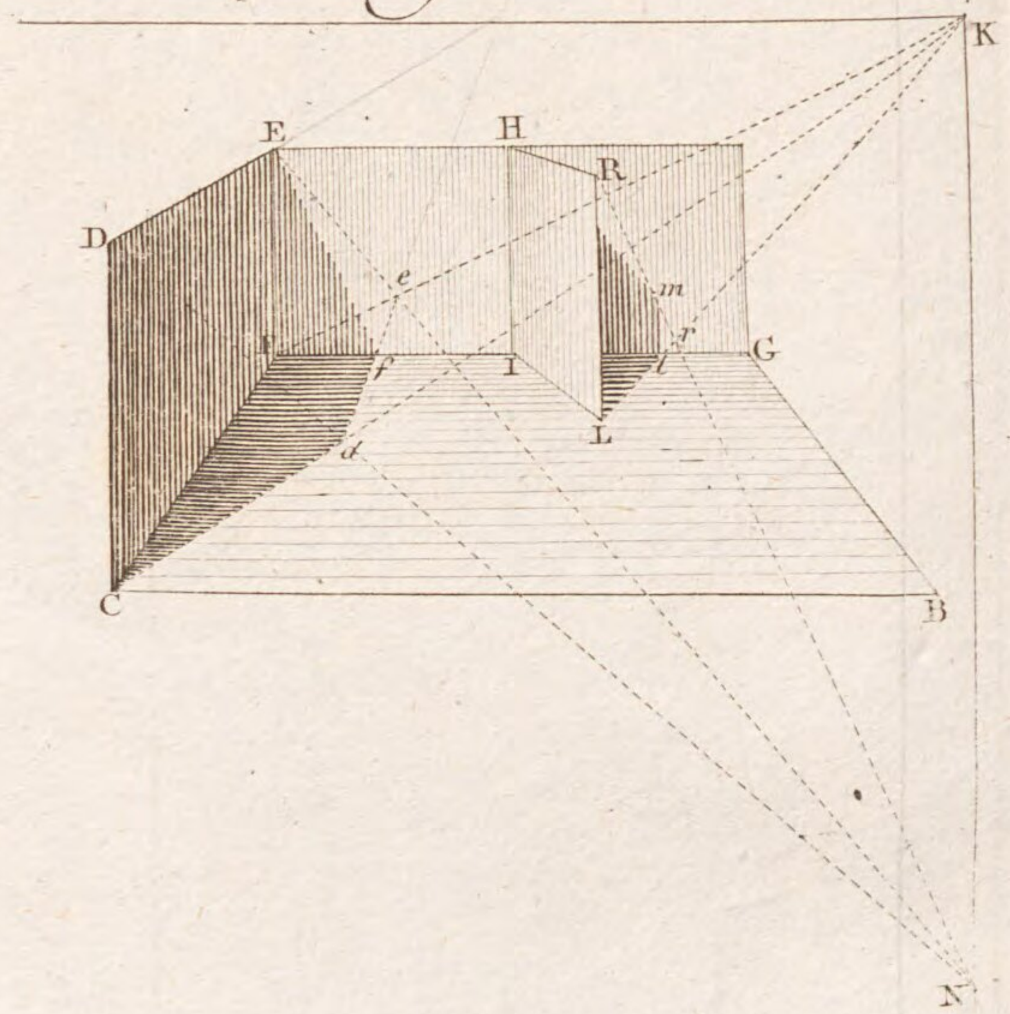
90.



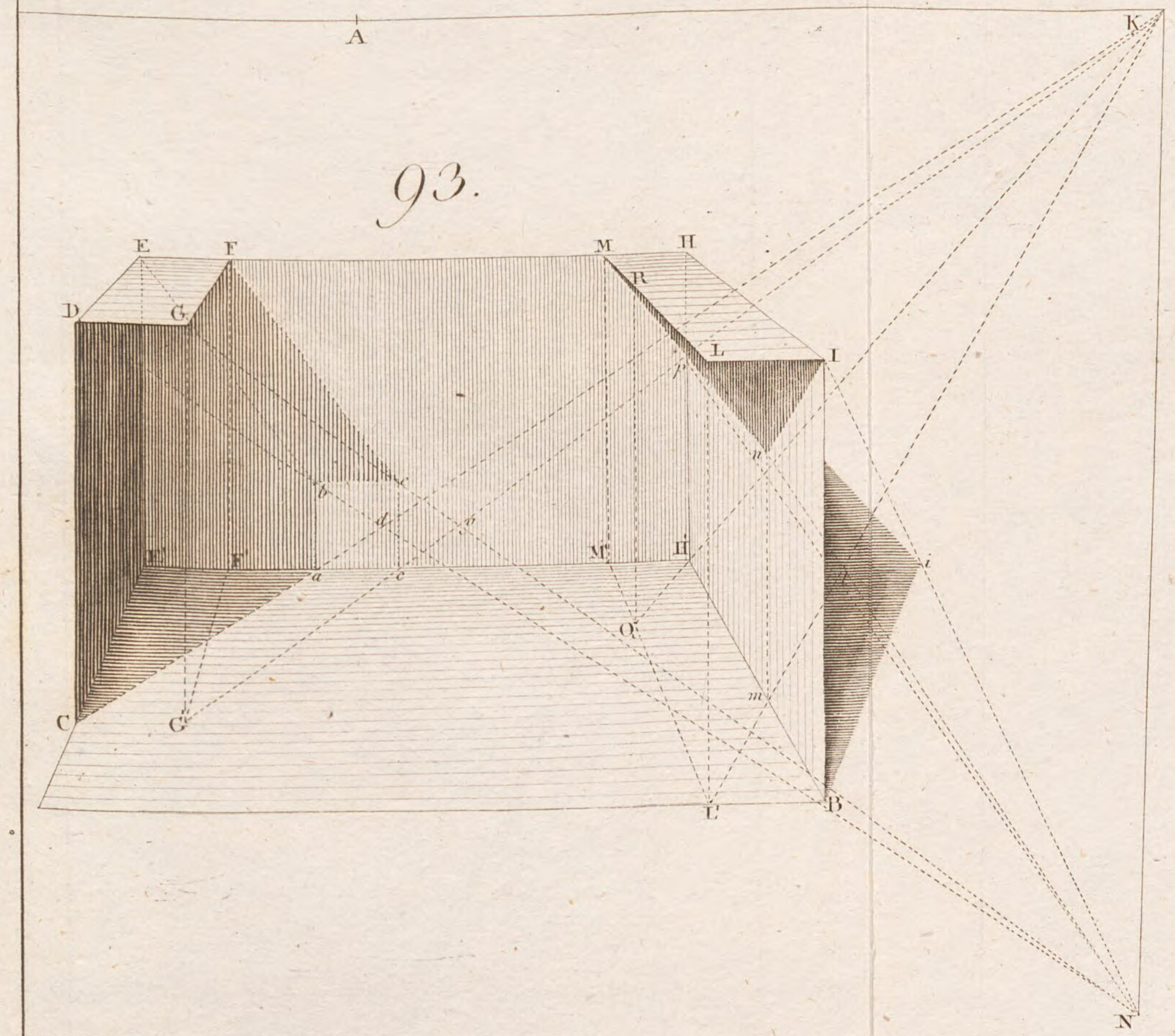
89.



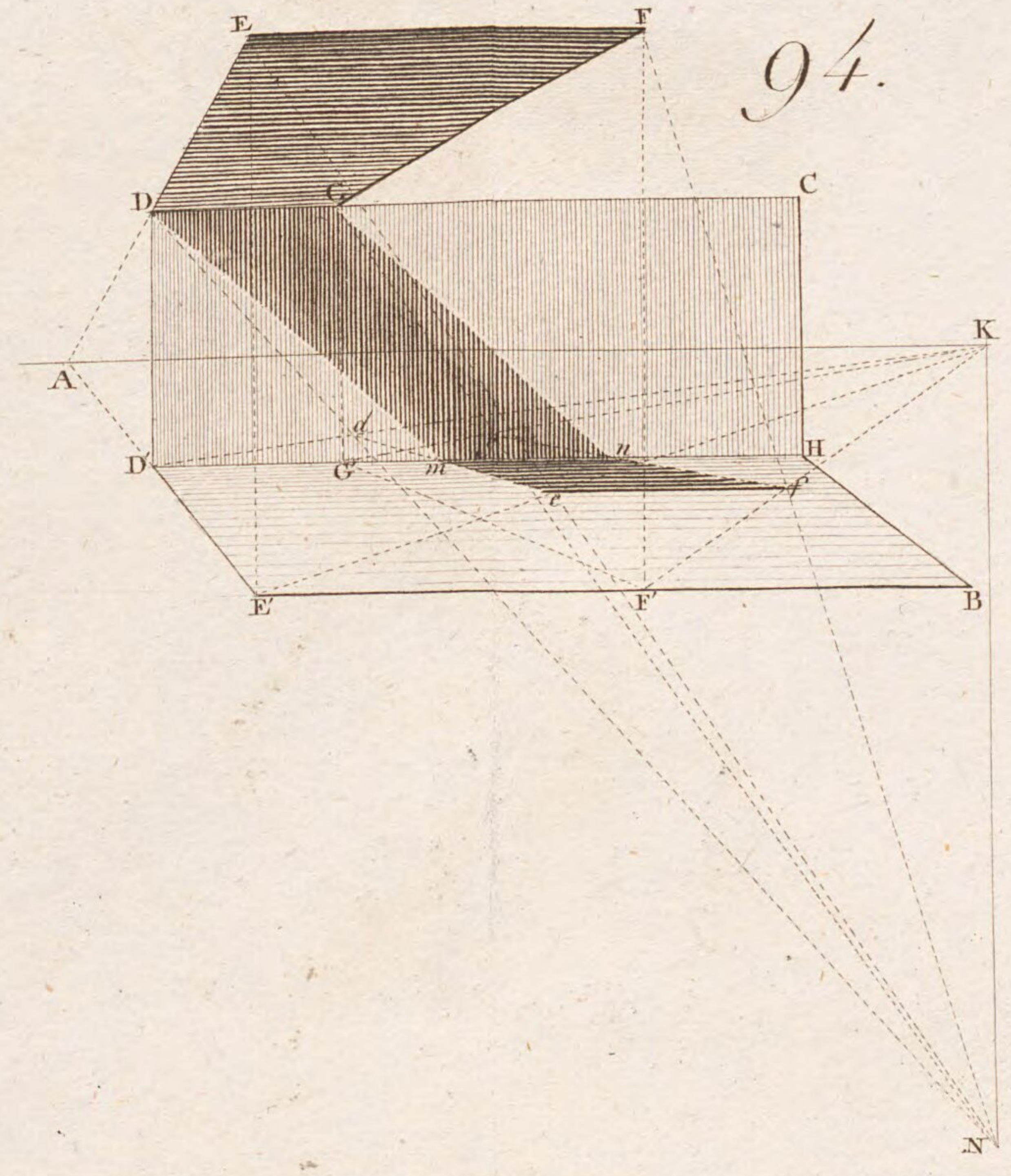
91.



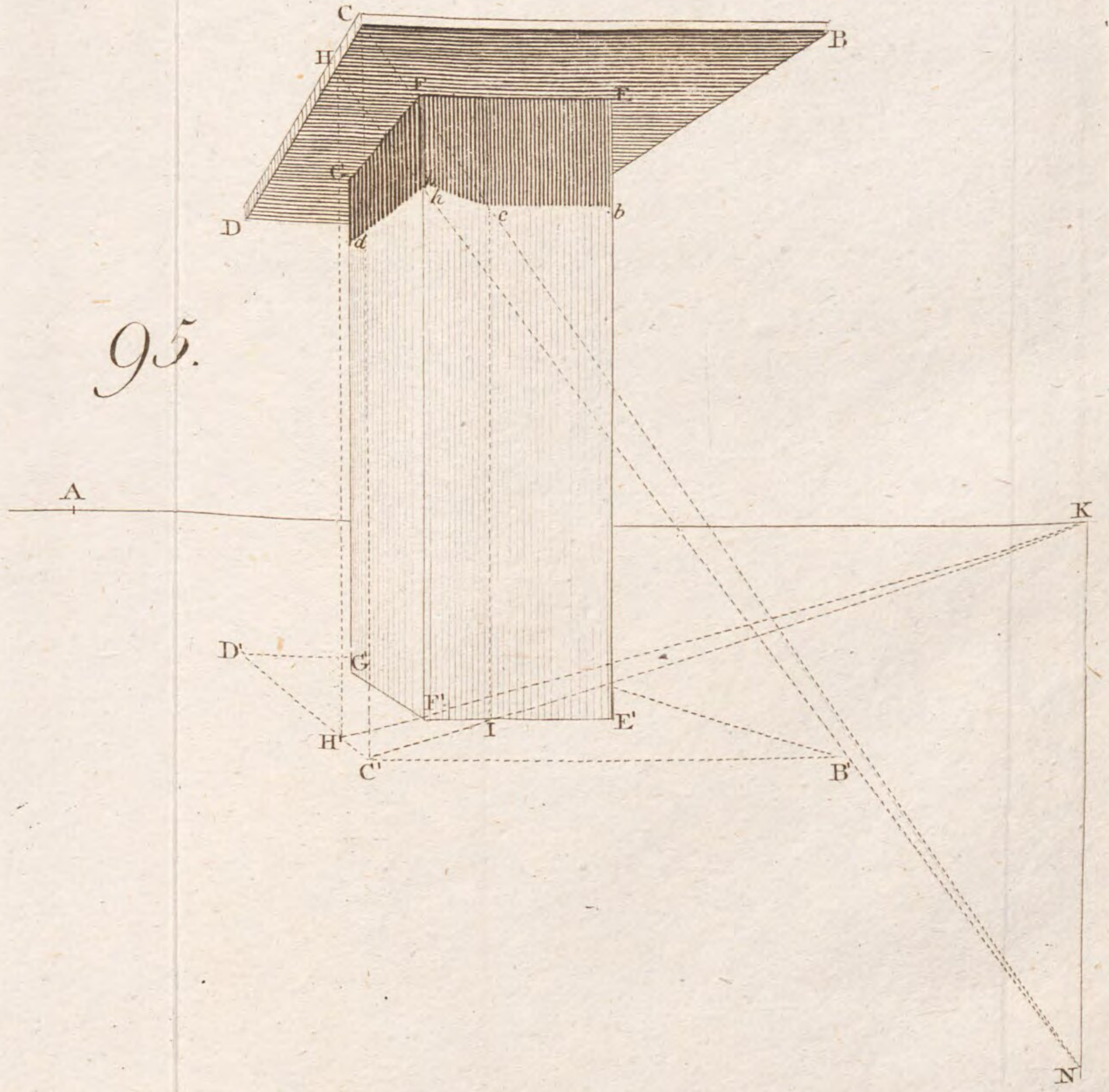
92.



93.



94.



95.

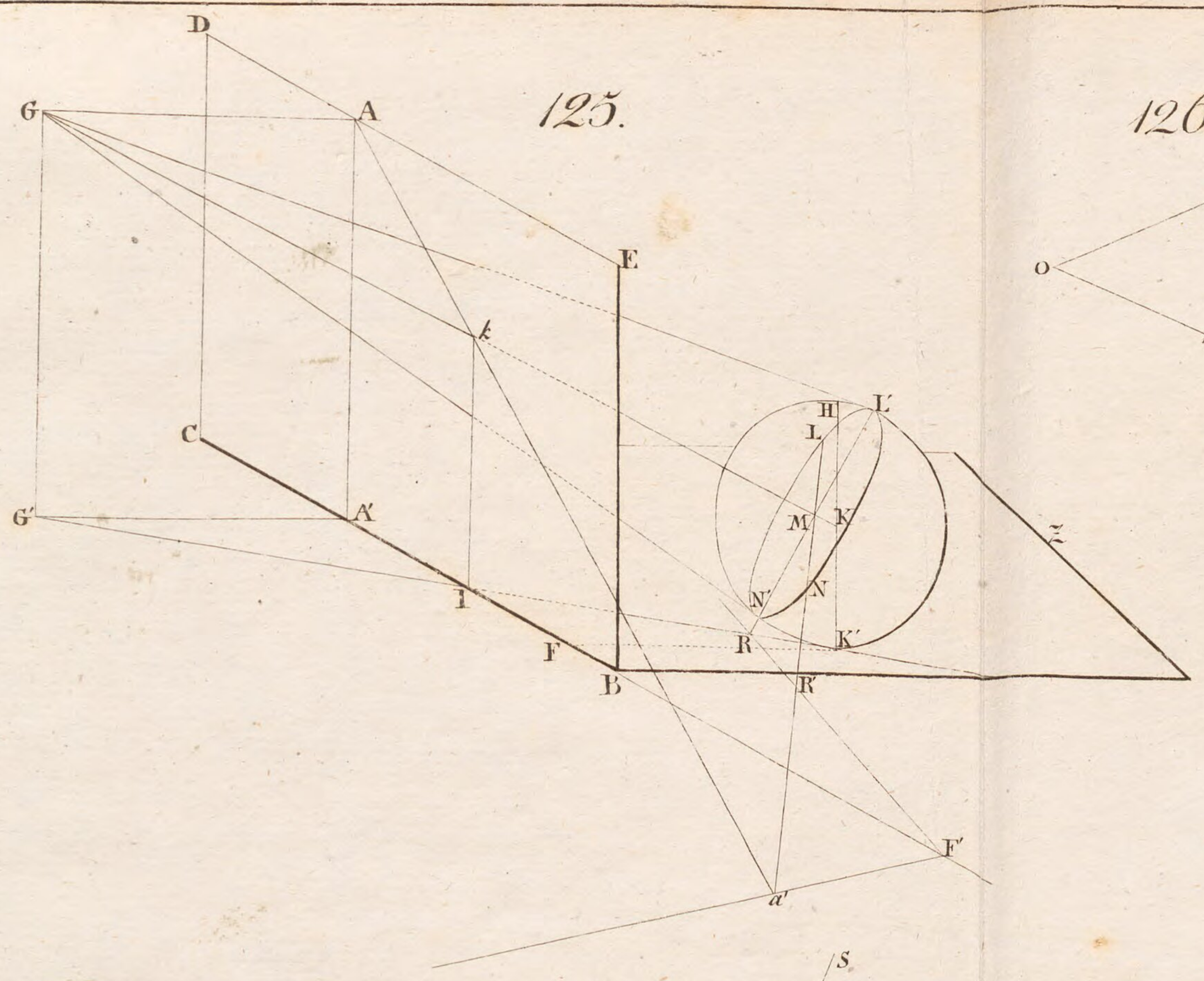
C. Jättnig sc. Berlin.

96.
97.
98.
99.
100.

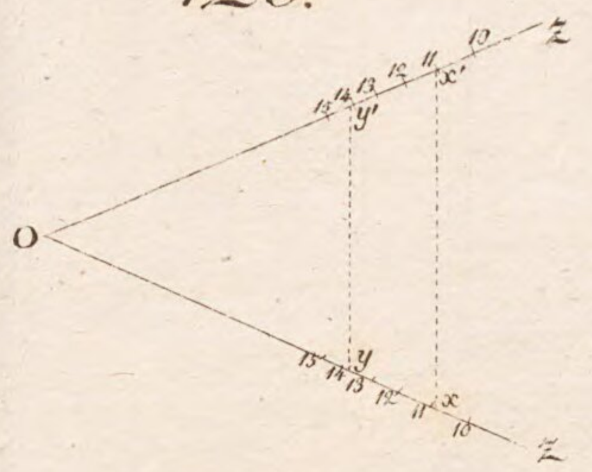
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.

C. Jättnig sc.

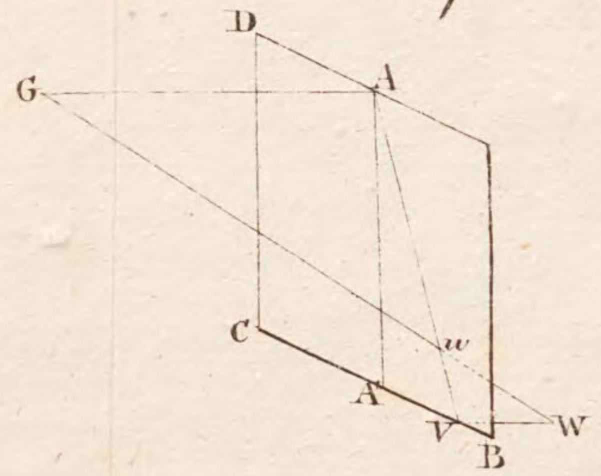
125.



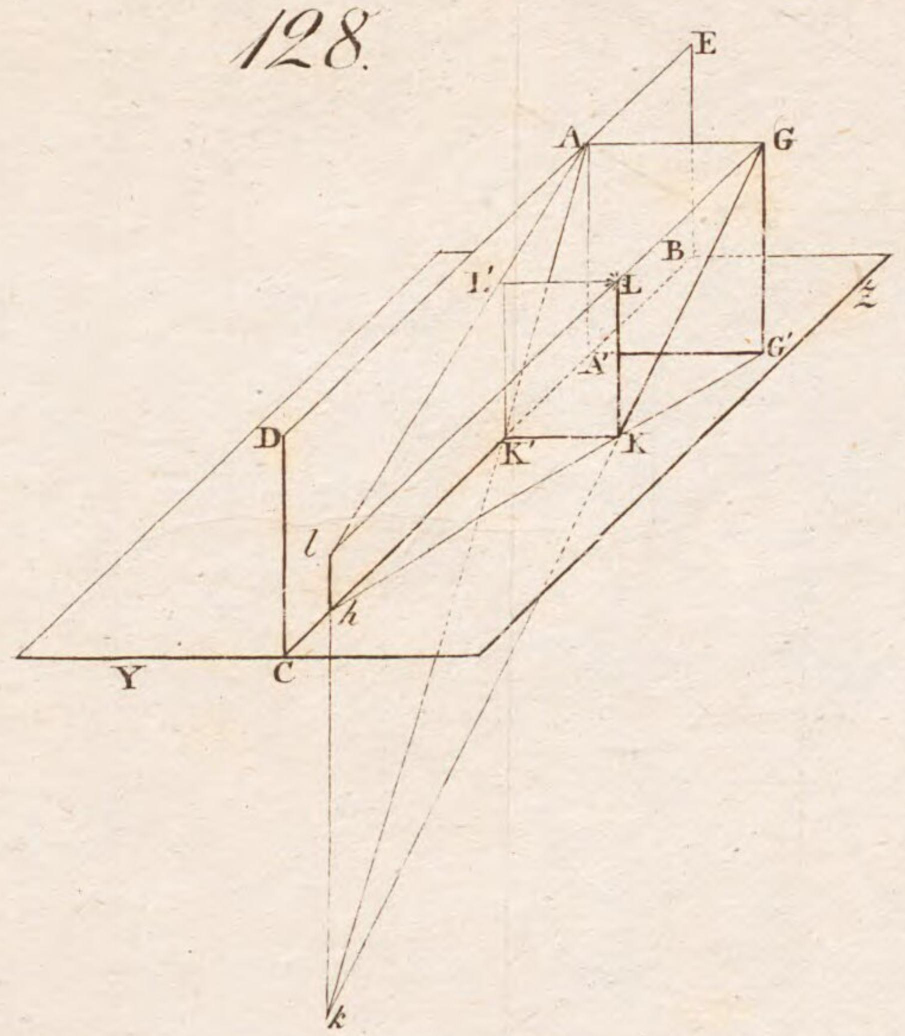
126.



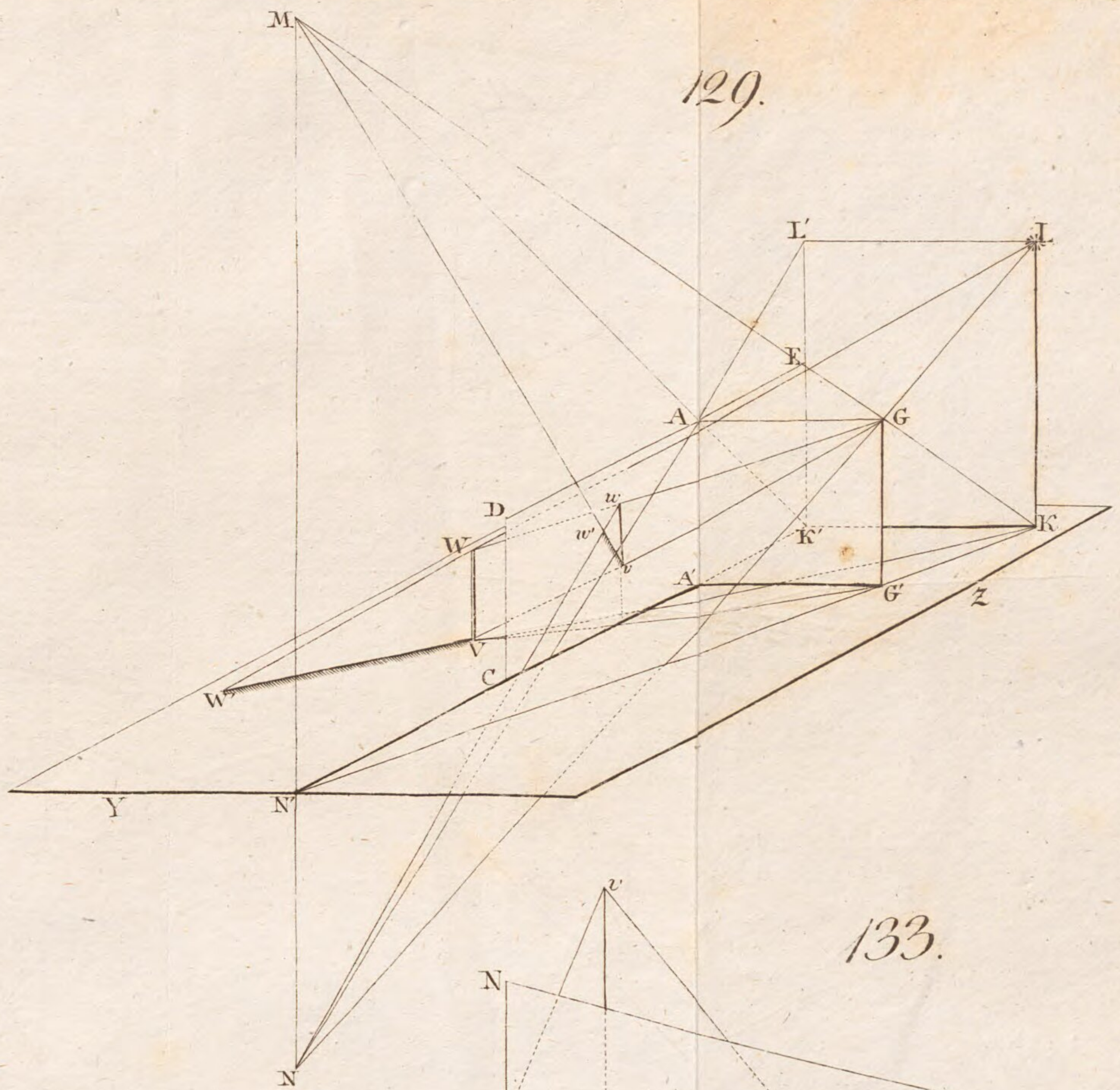
127.



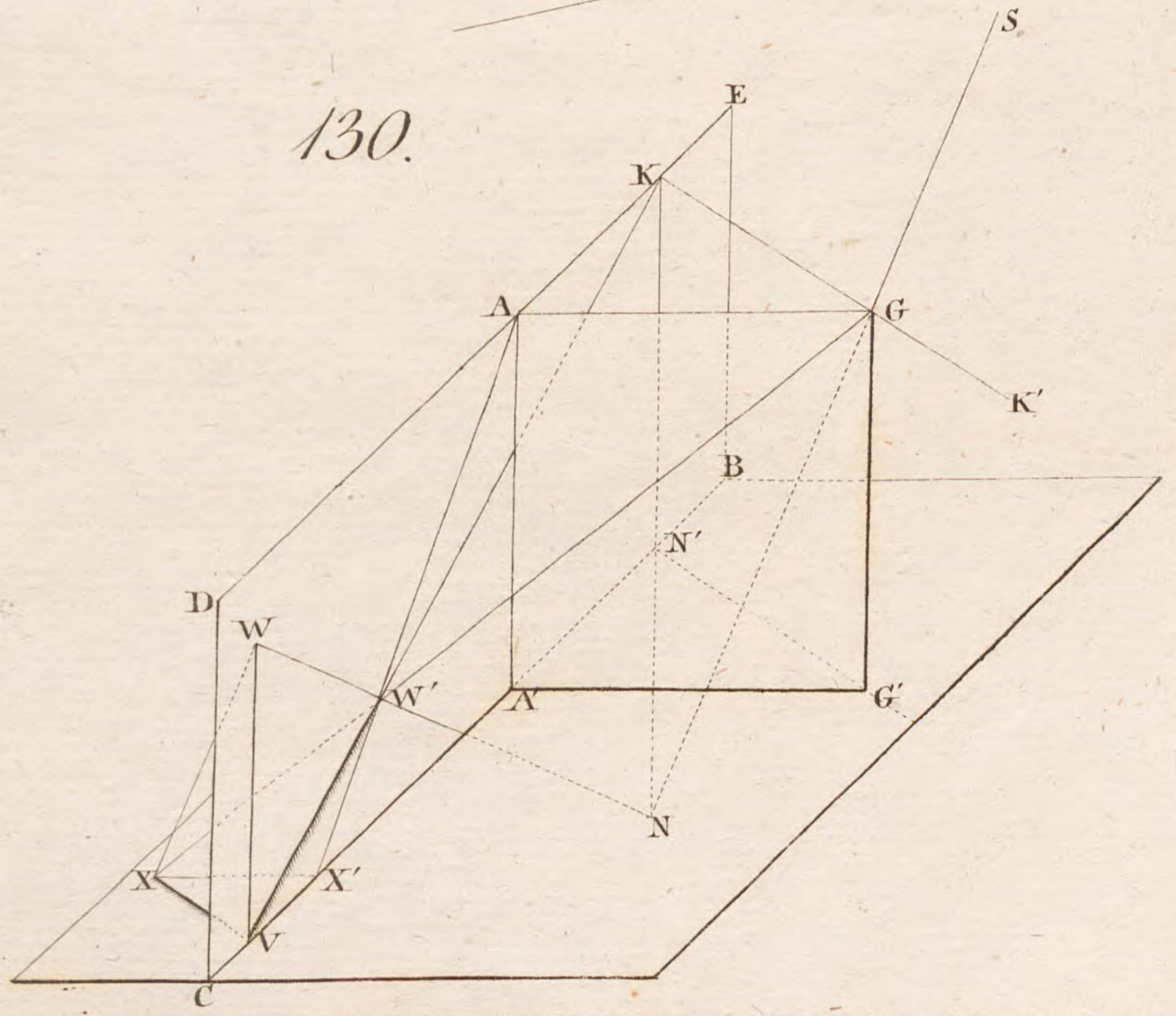
128.



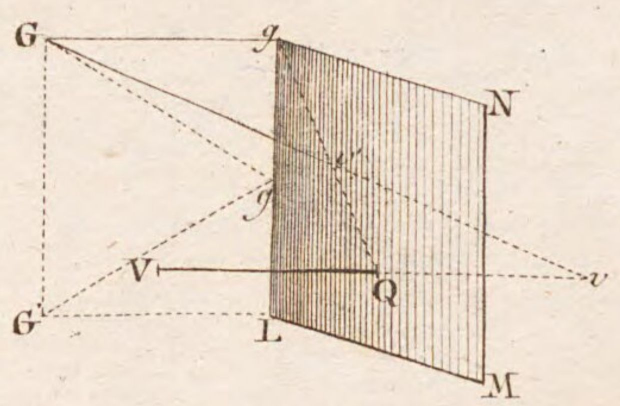
129.



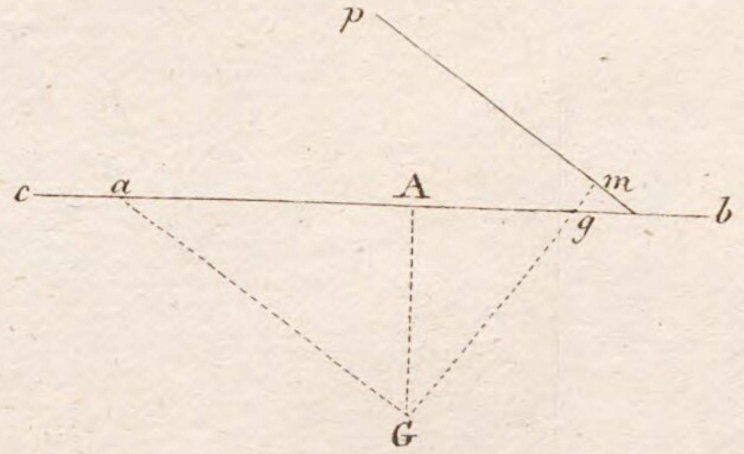
130.



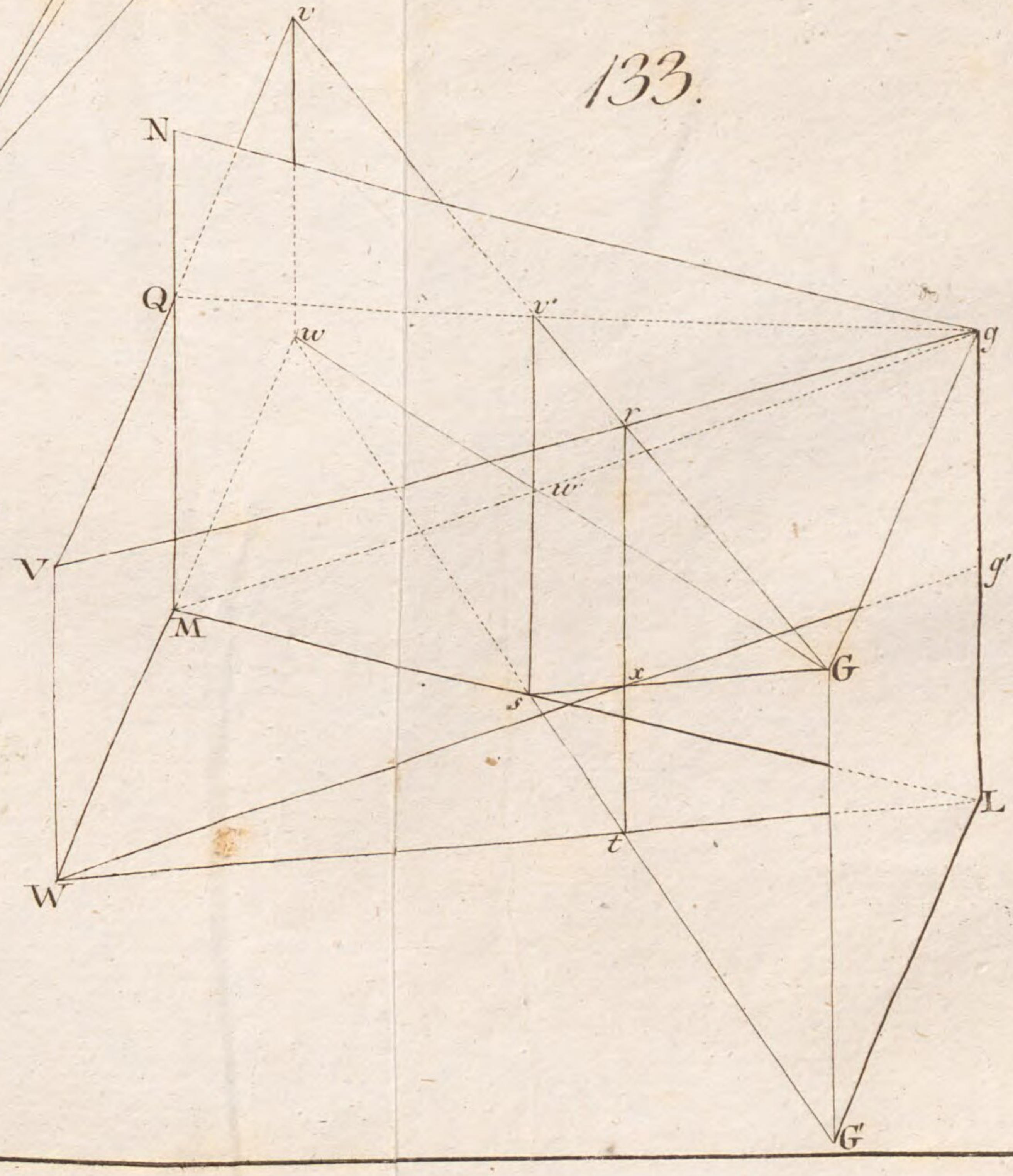
131.



132.



133.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Eytelwein, Johann Albert,

Handbuch der Perspektive

Bd.: 2

Berlin 1810

4 Math.a. 92 m-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10478659-2